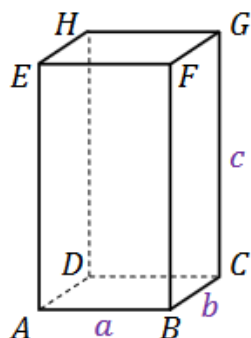
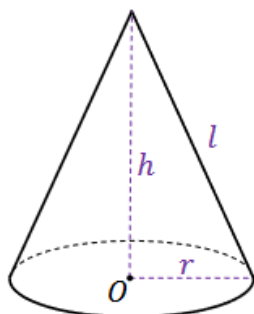


WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

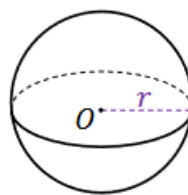
Wzory podstawowe na objętość – szkoła średnia



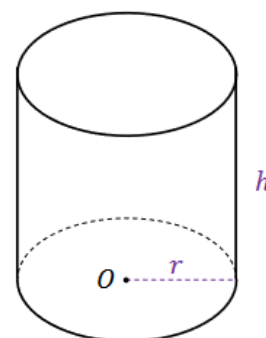
$$V = abc$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$V = \pi r^2 h$$

Podstawowe wzory

Siła wypadkowa

$$F = m\ddot{x} [N]$$

m - masa $[kg]$

$\ddot{x}$ - przyspieszenie $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Siła grawitacji

$$F_g = mg [N]$$

m - masa $[kg]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Siła tarcia

$$F_t = F_N \cdot f_t [N]$$

F_N - siła nacisku $[N]$

f_t - współczynnik tarcia $[-]$

Gęstość

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

m - masa $[kg]$

V - objętość $[m^3]$

γ - ciężar właściwy $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2}\right]$

Moment siły

$$M = Fr \sin(\alpha) [Nm]$$

$$F - \text{siła} \left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$$

$$r - \text{ramie} [m]$$

$\sin(\alpha)$ - sinus kąta pomiędzy wektorem siły i ramienia

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Pochodne podstawowe

funkcja	pochodna funkcji	
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
		$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ gdy $g(x) \neq 0$
		$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Całki podstawowe

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

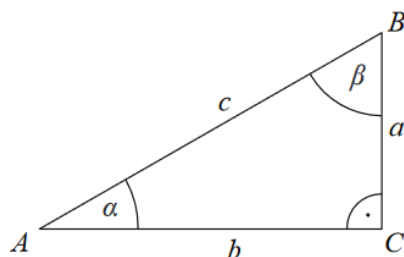
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) + \int g(x)$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) - \int g(x)$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x)$$

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

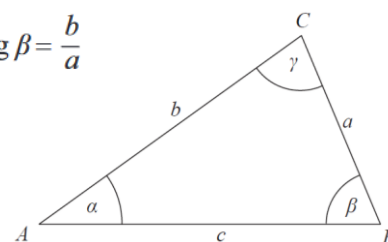
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



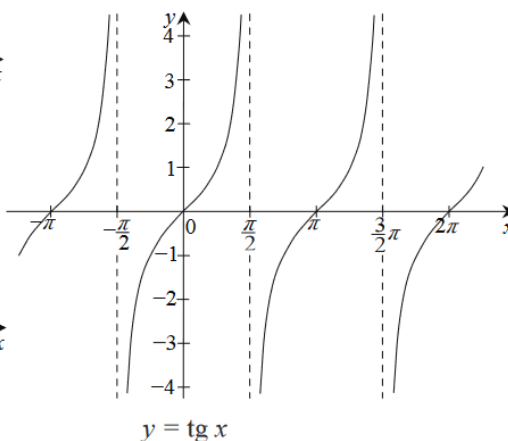
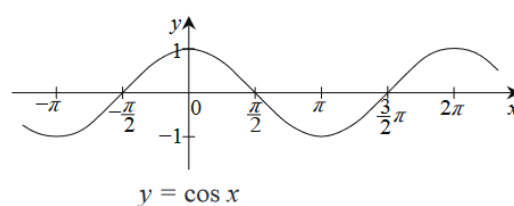
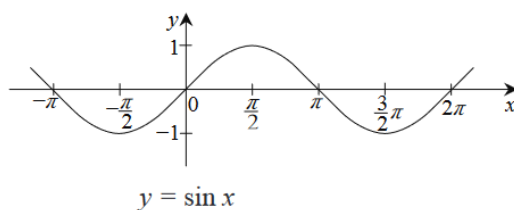
α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Twierdzenie Sinusów

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Twierdzenie Cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$



Funkcje trygonometryczne – zależności

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

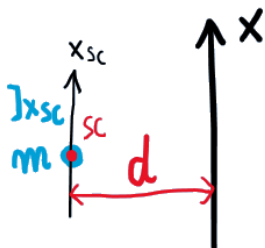
$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

Twierdzenie Steinera

Obliczanie masowych momentów bezwładności względem osi innej niż przechodzącej przez środek ciężkości

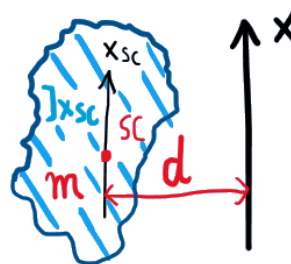
dla układu mas

$$I_x = I_{x_{sc}} + md^2 [kg \cdot m^2]$$



dla figur płaskich

$$I_x = I_{x_{sc}} + md^2 [kg \cdot m^2]$$



Ściskanie i rozciąganie prętów

Pręt – jednowymiarowy obiekt konstrukcyjny.



Układ statycznie wyznaczalny – układ, którego siły wewnętrzne można wyznaczyć za pomocą samych równań równowagi.

Napężenie $\sigma = \frac{F_N}{A} [Pa]$ F_N – siła normalna
 A – przekrój poprzeczny

Warunek wytrzymałościowy $\sigma \leq k_{r/s}$ – napężenie dopuszczalne (rozciąganie / ściskanie)

Wydłużenie (bezwzględne)

Wydłużenie względne

Prawo Hooke’a

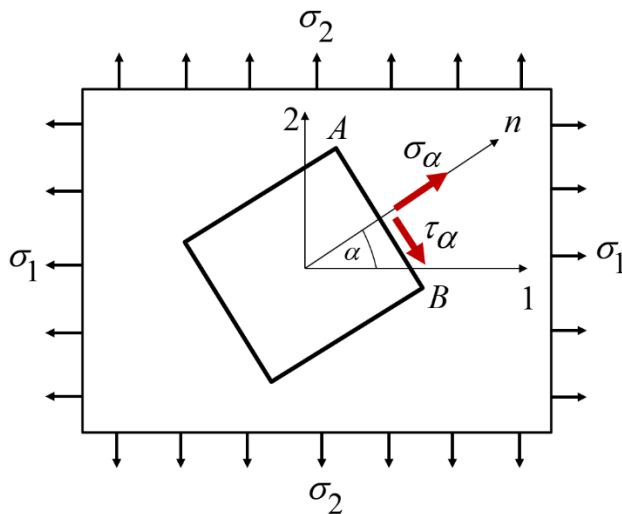
$$\Delta l = \frac{F_N \cdot l}{A \cdot E} \quad E - \text{moduł Younga}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$1 [MPa] = 10^6 [Pa] = 10^6 \frac{[N]}{[m^2]} = 1 \frac{[N]}{[mm^2]}$$

Naprężenia w układzie 2D – metoda analityczna



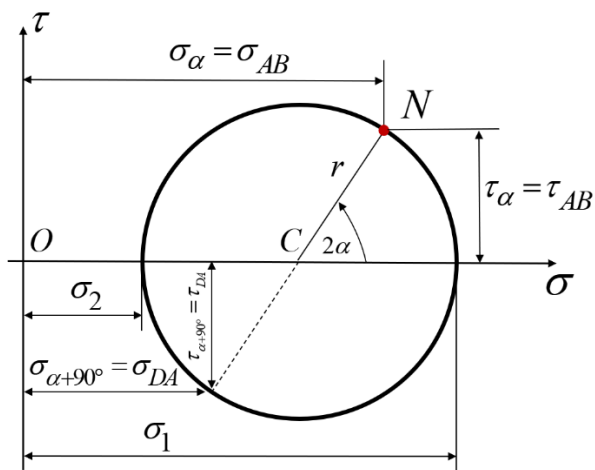
$\sigma_1 > \sigma_2$ - naprężenia główne

$\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ - naprężenie normalne i styczne
w badanym przekroju (pod kątem α)

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2(\alpha) + \sigma_2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tau_\alpha = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin(2\alpha)$$

Naprężenia w układzie 2D – koło Mohra



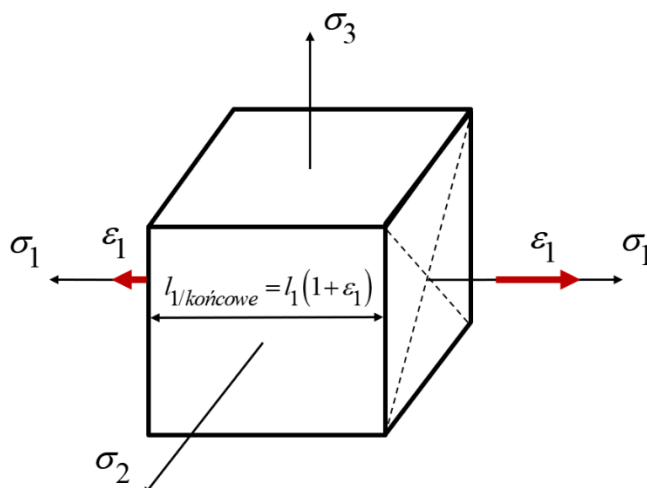
$\sigma_1 > \sigma_2$ - naprężenia główne

$\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ - naprężenie normalne i styczne
w badanym przekroju (pod kątem α)

$$|OC| = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ}}{2}$$

$$r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Odształcenia i naprężenia w układzie 3D – metoda analityczna



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2))$$

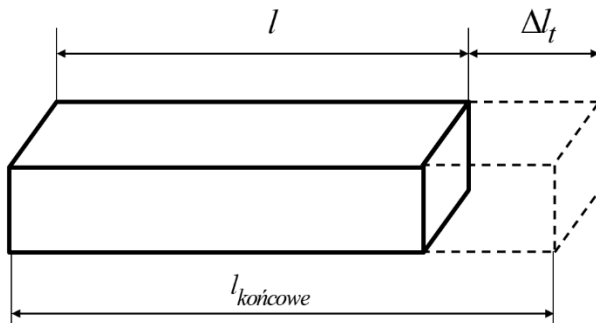
ε - odkształcenie względne

σ - naprężenie

E - moduł Younga

ν - współ. Poissona

Rozszerzalność cieplna



$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

α - współczynnik rozszerzalności cieplnej

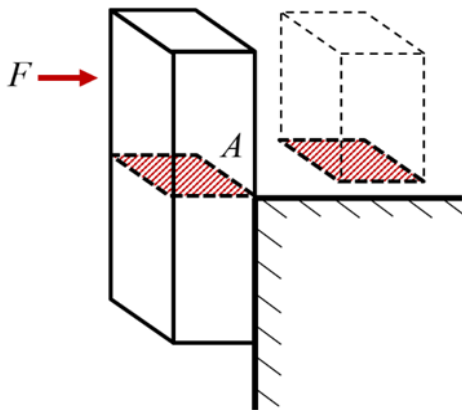
Δt - zmiana temperatury

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l_t}{l} = \alpha \cdot \Delta t$$

ε_t - temperaturowe odkształcenie względne

$$l_{końcowe} = l(1 + \varepsilon_t)$$

Naprężenia styczne w przekroju ścinanym

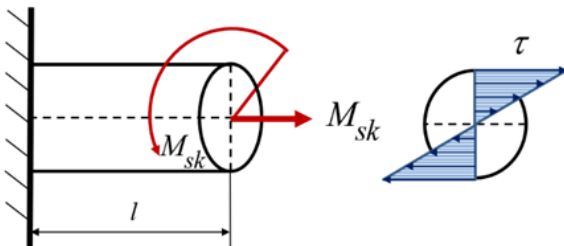


$$\tau = \frac{F}{A} \leq k_t \quad [MPa] = \frac{[N]}{[mm^2]}$$

k_t - dopuszczalne naprężenie na ścinanie

(zwykle $k_t \approx \frac{1}{2} k_{r/s}$)

Naprężenia maksymalne w wale kołowym lub pierścieniowym



$$\tau_{\max} = \frac{M_{sk}}{W_{sk}} \leq k_{sk} \quad [Pa] = \frac{[N \cdot m]}{[m^3]} \text{ lub } [MPa] = \frac{[N \cdot mm]}{[mm^3]}$$

M_{sk} - moment skręcający

k_{sk} - dopuszczalne naprężenie na skręcanie ($k_{sk} \approx k_t \approx \frac{1}{2} k_{r/s}$)

W_{sk} - wskaźnik wytrzymałości na skręcanie

Kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M_{sk} \cdot l}{G \cdot I_0} \leq \varphi_{dop}$$

$$[rad] = \frac{[N \cdot m][m]}{[Pa][m^4]} = \frac{[N \cdot mm][mm]}{[MPa][mm^4]}$$

$$1[rad] \approx 57,3^\circ$$

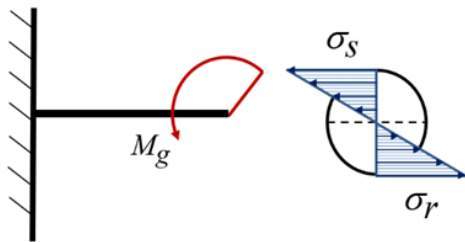
φ_{dop} - dopuszczalny kąt skręcenia

I_0 - biegunowy moment bezwładności

G - moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Napężenia maksymalne w belce i ramie zginanej



$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_g} \leq k_g \quad [Pa] = \frac{[N \cdot m]}{[m^3]} \text{ lub } [MPa] = \frac{[N \cdot mm]}{[mm^3]}$$

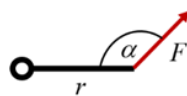
M_g - moment gnący

k_g - dopuszczalne napężenie na zginanie ($k_g \approx k_{r/s}$)

W_g - wskaźnik wytrzymałości na zginanie

Moment gnący

$$M_g = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$$



F - siła

r - ramię

Napężenia zredukowane von Misesa

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq k_r$$

$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ - napężenia główne

σ - napężenie normalne

(od zginania i rozciągania/ściskania)

τ - napężenie styczne (od skręcania)

k_r - napężenie dopuszczalne na rozciąganie

dla zginania ze skręcaniem:
$$\sigma_{red} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4} M_{sk}^2} = \frac{M_{red}}{W_g}$$

Napężenia zredukowane Coulomba

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r$$

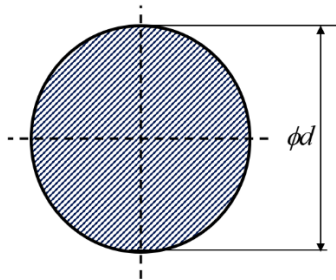
M_g - moment gnący

M_{sk} - moment skręcający

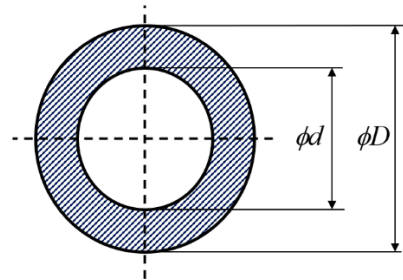
W_g - wskaźnik wytrzymałości na zginanie

dla zginania ze skręcaniem:
$$\sigma_{red} = \frac{1}{W_g} \sqrt{M_g^2 + M_{sk}^2} = \frac{M_{red}}{W_g}$$

Wskaźniki wytrzymałości na skręcanie W_{sk}

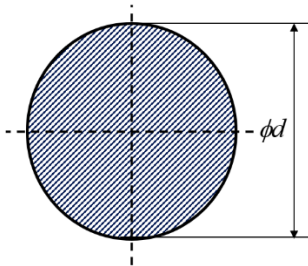


$$W_{sk} = \frac{\pi d^3}{16}$$

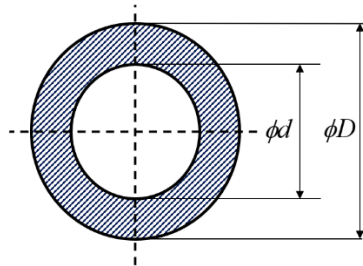


$$W_{sk} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D}$$

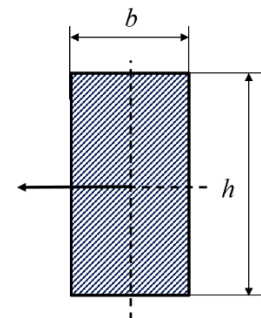
Wskaźniki wytrzymałości na zginanie W_g



$$W_g = \frac{\pi d^3}{32}$$

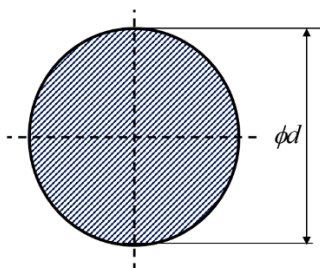


$$W_g = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D}$$



$$W_g = \frac{bh^2}{6}$$

Osiowe i biegunowe momenty bezwładności

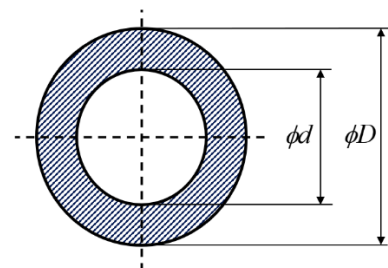


$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

I - osiowy moment bezwładności

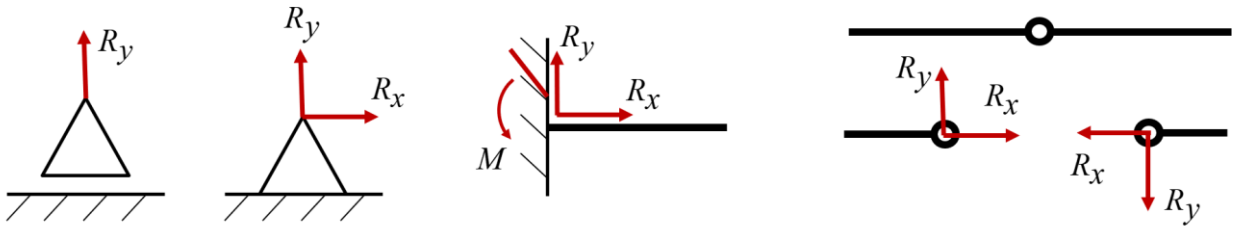
I_0 - biegunowy moment bezwładności



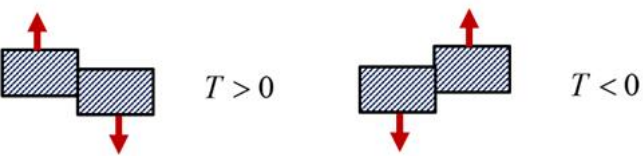
$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$$

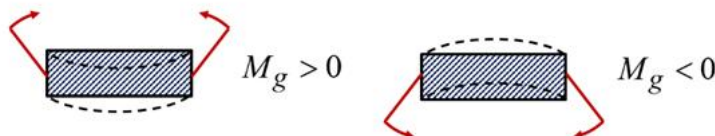
$$I_0 = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

Reakcje w podporach

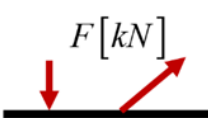
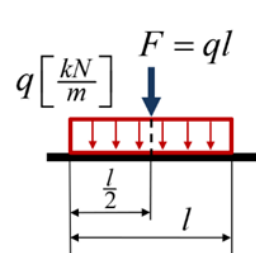
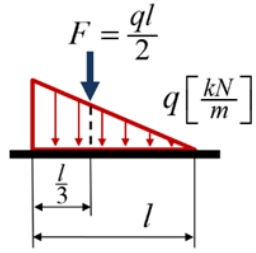


Założenia dotyczące znaków przy obliczaniu belek i ram

- Siła tnąca $T(x)$

- Siła normalna $N(x)$

- Moment gnący $M_g(x) = F_T \cdot x$


Rodzaje obciążeń:

- Siła skupiona 
- Moment skupiony 
- Obciążenie rozłożone
 


Siła tnąca: $T_L(x) = \frac{dM_g(x)}{dx}$ $T_P(x) = -\frac{dM_g(x)}{dx}$

Belki i ramy - metoda rozwiązania:

Etapy rozwiązania:

$$3t = w$$

t = tarcze (obiekty)

w = więzy (reakcje)

0. Sprawdzamy statyczną wyznaczalność

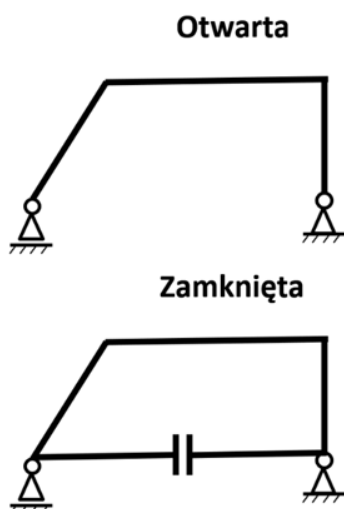
1. Wyznaczamy reakcje w podporach -> traktujemy obiekt jako całość

2. Ramy zamknięte -> otwieramy

3. Dzielimy obiekt na przedziały (od lewej strony) -> względem obciążeń, podpór lub zgięć

4. Obliczamy moment gnący, siłę tnącą i normalną dla każdego przedziału oddzielnie

5. Rysujemy wykresy momentu gnącego, siły tnącej i normalnej



Rama zamknięta:

-> Otwieramy ramę przed „liczeniem przedziałów”

-> Gdzie najwygodniej otworzyć ramę:

