



KURS

CAŁKI WIELOKROTNE

Lekcja 1
Całki podwójne

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Obszarem całkowania w całce podwójnej jest:

- a) obszar trójwymiarowy
- b) obszar dwuwymiarowy
- c) przedział liczbowy
- d) funkcja dwóch zmiennych

Pytanie 2

Obszar normalny to taki obszar...

- a) w którym funkcja ogranicza obszar tylko od dołu
- b) w którym funkcja ogranicza wykres tylko od góry
- c) w którym jedna funkcja ogranicza wykres od dołu, a druga od góry
- d) który jest bryłą

Pytanie 3

Współrzędnych biegunowych używamy, gdy obszarem całkowania jest...

- a) Koło
- b) Bryła
- c) Obszar normalny
- d) Prostokąt



Pytanie 4

Obszarem całkowania całki $\iint_D \frac{dx dy}{(x-y)^3}$, gdzie D ograniczone jest: $x=2$, $x=4$, $y=1$ i $y=3$ jest:

- a) okrąg
- b) trójkąt
- c) hiperbola
- d) prostokąt

Pytanie 5

Całka $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$ po zmianie kolejności całkowania ma postać:

- a) $\int_1^0 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{-x+2} f(x, y) dy$
- b) $\int_1^0 dx \int_0^{-x+2} f(x, y) dy + \int_2^1 dx \int_0^{-x+2} f(x, y) dy$
- c) $\int_1^0 dx \int_0^{-x+2} f(x, y) dy$
- d) $\int_2^1 dx \int_0^{-x+2} f(x, y) dy$



Pytanie 6

Do obliczania pól powierzchni w przestrzeni potrzebna jest znajomość obliczania:

- a) pochodnych cząstkowych
- b) pól figur płaskich
- c) objętości brył
- d) pól brył

Pytanie 7

Pole figury ograniczonej linią $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$ możemy obliczyć...

- a) Korzystając ze wzoru na objętość bryły
- b) Korzystając ze wzoru na pole powierzchni bryły
- c) Korzystając ze współrzędnych biegunowych
- d) Wyznaczając funkcję y z równania

Pytanie 8

Całka z funkcji o wartościach nieujemnych jest na pewno:

- a) ujemna
- b) dodatnia
- c) nieujemna
- d) niedodatnia



Pytanie 9

Obliczanie całek podwójnych stosujemy podczas obliczania :

- a) pochodnych cząstkowych
- b) objętości brył
- c) długości krzywej

Pytanie 10

Całkę podwójną zamieniamy możemy zamienić na całki iterowane, gdy:

- a) Zawsze
- b) Liczymy objętość bryły
- c) Całkujemy po obszarze normalnym

Część 2: ZADANIA

Zad.1

Oblicz całkę podwójną po wskazanych obszarach:

a). $\iint_D xy^2 dx dy$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$

b). $\iint_D y^3 e^x dx dy$, $-1 \leq x \leq 0$, $1 \leq y \leq 2$

c). $\iint_D (e^x y + 3x) dx dy$, $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 3$

d). $\iint_D xy \sin(xy^2) dx dy$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq 2$

Zad.2

Oblicz całkę podwójną:

a). $\iint_D (2x^3 + 4y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = 1 - x^2$, $y = x + 1$.

b). $\iint_D (1 - x - y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = x^2$, $y = 4$.

c). $\iint_D (8x + y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = x^2 - 3$, $y + 1 = x$.

d). $\iint_D xy^2 dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y^3 = x$, $x = 1$, $x + y = 0$

e). $\iint_D (x - 2y) dx dy$, gdzie D jest obszarem $x^2 + y^2 \leq 1$

f). $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem $x^2 + y^2 \leq 2$

g). $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$



h). $\iint_D 2xy dx dy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$

i). $\iint_D (1 + x - y) dx dy$, gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A = (-4, 0), B = (0, 2), C = (2, 0)$

j). $\iint_D (5x^2 - 2xy) dx dy$, w trójkącie ograniczonym prostą $x + 2y = 2$ i osiami współrzędnych.

Zad.3

Zmień kolejność całkowania w całce:

a). $\int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy$

b). $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$

c). $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

d). $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$

Zad.4

Oblicz objętość brył ograniczonych powierzchniami:

a). $x + y + z = 1$ i płaszczyznami układu współrzędnych

b). $z = y + 4, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

c). $z = 4 - x - y, z = 0, y = x^2, y = 1$

d). $x^2 + y^2 = 9, z = 1 - x, z = 5$

e). $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 4$

f). $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 2y$



g). $x^2 + y^2 + 1 = z, \sqrt{5 - x^2 - y^2} = z$

h). $x + 2y + z = -2, x + 2y - 2 = 0$ i płaszczyznami układu współrzędnych

Zad.5

Oblicz:

a). $\iint_D 36 dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 16$

b). $\iint_D 67 dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 81$

Zad.6

Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a). $y = x, x = 2, y = 3x$

b). $y = x, x = 4, y = 2x$

c). $xy = 9, x + y = 10$



Zad.7

Oblicz:

- a). pole powierzchni bryły: $x^2 + y^2 - z = 0$ zawartej wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$,
- b). pole powierzchni bryły: $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ zawartej wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$.
- c). pole powierzchni bryły: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ zawartej wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 1$.

KONIEC