



# KURS EKONOMETRIA

## LEKCJA 3 Estymacja parametrów modelu

### ZADANIE DOMOWE

## Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

### Pytanie 1

Na czym polega metoda najmniejszych kwadratów?

- a) Polega na znalezieniu takiej linii regresji, czyli takich oszacowań parametrów strukturalnych  $a_i$ , aby suma kwadratów odchyłeń zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej od jej wartości teoretycznych obliczonych z modelu była największa.
- b) Szuka takiej linii regresji, czyli takich oszacowań parametrów strukturalnych  $a_i$ , aby suma sześcianów odchyłeń zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej od jej wartości teoretycznych obliczonych z modelu była najmniejsza.
- c) Poszukuje się takiej linii regresji, czyli takich oszacowań parametrów strukturalnych  $a_i$ , aby suma kwadratów odchyłeń zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej od jej wartości teoretycznych obliczonych z modelu była najmniejsza.
- d) Żadne z powyższych.

### Pytanie 2

Na podstawie poniższych danych przedstawionych w tabeli poniżej oszacowano parametr kierunkowy linii regresji  $\hat{Y}_t = a_0 + a_1 X_{t1}$ :  $a_1 = 0,8$ . Ile wynosi wartość współczynnika  $a_0$ ?

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 6 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| y | 4 | 3 | 3 | 5 | 0 |

- a) 0,2
- b) -0,2
- c) 1,6
- d) 6,2

### Pytanie 3

Oszacowano równanie linii regresji  $\hat{y} = 14 - 2x$  oraz obliczono wartość średnią zmiennej  $x$ :  $\bar{x} = 4$ . Jaka jest wartość średnia zmiennej  $y$ ?

- a)  $\bar{y} = 22$
- b)  $\bar{y} = 8$
- c)  $\bar{y} = 5$
- d)  $\bar{y} = 6$

### Pytanie 4

Wskaż poprawne zdanie na temat macierzy  $X$ :

- a) W każdym jednorównaniowym modelu ekonometrycznym pierwszą kolumnę macierzy  $X$  stanowi kolumna wypełniona wartością jeden.
- b) W jednorównaniowym modelu ekonometrycznym z wyrazem wolnym  $a_0$  pierwszą kolumnę macierzy  $X$  stanowi kolumna jedynek.
- c) Jeśli jednorównaniowy model ekonometryczny nie zawiera wyrazu wolnego  $a_0$ , to w pierwszej kolumnie macierzy  $X$  stoją zera.
- d) W jednorównaniowym modelu ekonometrycznym z wyrazem wolnym  $a_0$  zawsze ostatnią kolumnę macierzy  $X$  stanowi kolumna jedynek.

### Pytanie 5

Macierzy o jakich wymiarach nie uda się pomnożyć przez siebie?

- a)  $5 \times 6$  oraz  $6 \times 2$
- b)  $2 \times 3$  oraz  $3 \times 3$
- c)  $2 \times 3$  oraz  $2 \times 3$
- d)  $4 \times 7$  oraz  $7 \times 5$

### Pytanie 6

Wskaż poprawny wzór na obliczenie estymatorów ocen parametrów szacowanych MNK.

- a)  $a = (X^T X)^{-1} X^T Y$
- b)  $a = X^T Y (X^T X)^{-1}$
- c)  $a = X^T X (X^T Y)^{-1}$
- d)  $a = (X^T X)^{-1} X^T X$

### Pytanie 7

W celu oszacowania parametrów strukturalnych modelu liniowego

$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + \alpha_2 X_{t2} + \varepsilon_t$  na podstawie 15-elementowej próby wyznaczono m.in. macierz

$$X^T X = \begin{bmatrix} ? & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 10 \\ 7 & 10 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Ile powinna wynosić wartość elementu na przecięciu się pierwszego}$$

wiersza i pierwszej kolumny?

- a) 15.
- b) 13.
- c) 22.
- d) 35.

### Pytanie 8

W macierzy  $(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 22 \\ \bullet & 6 & -26 \\ \bullet & \bullet & 34 \end{bmatrix}$  w miejsce „kropek” należy wstawić:

- a) we wszystkich miejscach wartość 0;
- b) we wszystkich miejscach wartość 1;
- c) odpowiednio wartości: 8, 6, 34;
- d) odpowiednio wartości: -5, 22, -26.

### Pytanie 9

Wskaż zdanie prawdziwe:

- a) Macierz  $(X^T X)^{-1}$  nie jest macierzą symetryczną.
- b) Rząd macierzy  $r(X^T X)$  jest równy liczbie zmiennych objaśniających.
- c) Macierz  $X^T X$  jest macierzą kwadratową.
- d) Do macierzy  $X^T X$  nie zawsze istnieje macierz odwrotna  $(X^T X)^{-1}$ .

### Pytanie 10

Na podstawie KMNK oszacowano parametry liniowego modelu ekonometrycznego

$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + \alpha_2 X_{t2} + \varepsilon_t$ . Do obliczeń wykorzystano funkcję regresji w programie Excel.

Oszacowany model ekonometryczny jest postaci:

|            | Współczynniki | Błąd standardowy | t Stat  | Wartość-p  | Dolne 95%   | Górne 95%   |
|------------|---------------|------------------|---------|------------|-------------|-------------|
| Przecięcie | -382738,4993  | 1094365,517      | -0,3497 | 0,73682    | -2970501,74 | 2205024,741 |
| X1         | 4963,6585     | 163,3467         | 30,3872 | 1,0788E-08 | 4577,4052   | 5349,9124   |
| X2         | 14,1593       | 13,3299          | 1,0622  | 0,32340    | -17,3610    | 45,6796     |

- a)  $\hat{Y}_t = -382738,499 + 4936,656X_{t1} + 14,159X_{t2}$
- b)  $\hat{Y}_t = 1094365,517 + 163,347X_{t1} + 13,33X_{t2}$
- c)  $\hat{Y}_t = 382738,499 - 4936,656X_{t1} - 14,159X_{t2}$
- d)  $\hat{Y}_t = -0,35 + 30,387X_{t1} + 1,062X_{t2}$

## Część 2: ZADANIA

### Zad. 1

Korzystając z MNK oszacuj skalarnie (za pomocą estymatorów parametrów  $\alpha_0, \alpha_1$ ) oraz zinterpretuj parametry strukturalne modelu ekonometrycznego  $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \varepsilon_t$  dla następujących danych:

a)

| Miesiąc | Wydatki na reklamę [mln zł]<br>(X) | Wartość sprzedaży gazet [mln zł]<br>(Y) |
|---------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1       | 1,2                                | 101                                     |
| 2       | 0,8                                | 92                                      |
| 3       | 1                                  | 110                                     |
| 4       | 1,3                                | 120                                     |
| 5       | 0,7                                | 90                                      |
| 6       | 0,8                                | 82                                      |
| 7       | 1                                  | 93                                      |
| 8       | 0,6                                | 75                                      |
| 9       | 0,9                                | 91                                      |
| 10      | 1,1                                | 105                                     |

b)

| Rok | Wydatki na żywność [zł]<br>(Y) | Dochód konsumenta [zł]<br>(X) |
|-----|--------------------------------|-------------------------------|
| 1   | 999                            | 1285                          |
| 2   | 985                            | 1300                          |
| 3   | 1015                           | 1410                          |
| 4   | 1063                           | 1452                          |
| 5   | 1050                           | 1473                          |
| 6   | 1100                           | 1491                          |
| 7   | 1000                           | 1500                          |
| 8   | 1091                           | 1631                          |
| 9   | 1102                           | 1525                          |
| 10  | 1085                           | 1500                          |

c)

| Miesiąc | Wartość produkcji [mln zł]<br>(Y) | Zużycie surowca A [t]<br>(X) |
|---------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1       | 21,1                              | 6                            |
| 2       | 22,9                              | 4,8                          |
| 3       | 25                                | 4                            |
| 4       | 26,4                              | 3,1                          |
| 5       | 29,6                              | 2,1                          |

d)

| N | Masa ślimaka [dag]<br>(Y) | Wielkość muszli [cm]<br>(X) |
|---|---------------------------|-----------------------------|
| 1 | 3                         | 2                           |
| 2 | 5                         | 3                           |
| 3 | 8                         | 6                           |
| 4 | 3                         | 1                           |
| 5 | 6                         | 4                           |
| 6 | 5                         | 2                           |

e)

| N | Ocena z kolokwium<br>(Y) | Czas nauki [h]<br>(X) |
|---|--------------------------|-----------------------|
| 1 | 5                        | 9                     |
| 2 | 4,5                      | 7                     |
| 3 | 5                        | 4                     |
| 4 | 3                        | 3,5                   |
| 5 | 3,5                      | 2                     |
| 6 | 2                        | 1,5                   |
| 7 | 4,5                      | 10                    |
| 8 | 3                        | 6                     |

## Zad. 2

Poniżej przedstawione są obserwacje zmiennych  $W$  oraz  $Z$ .

| $W$ | 3 | 2 | 5 | 5 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |

Ponadto wiadomo, że:  $\sum_{t=1}^5 (w_t - \bar{w})^2 = 8$ ,  $\sum_{t=1}^5 (z_t - \bar{z})^2 = 4$ ,  $\sum_{t=1}^5 (w_t - \bar{w})(z_t - \bar{z}) = 1$ .

Oszacuj modele zależności zmiennej  $W$  od zmiennej  $Z$  oraz zależności zmiennej  $Z$  od  $W$ .

### Zad. 3

Zakłada się, że wartości zmiennej  $Y$  zależą w sposób liniowy od wartości zmiennych  $X_1$  i  $X_2$ . Oszacuj KMNK (metodą macierzową) parametry strukturalne jednorównaniowego modelu ekonometrycznego na podstawie następujących danych i zapisz oszacowany model ekonometryczny:

a)

| t | $Y_t$ | $X_{t1}$ | $X_{t2}$ |
|---|-------|----------|----------|
| 1 | 1     | 2        | -1       |
| 2 | -1    | 2        | 2        |
| 3 | 0     | 1        | -1       |
| 4 | -2    | -3       | 1        |
| 5 | 1     | -2       | -1       |

b)

| t | $Y_t$ | $X_{t1}$ | $X_{t2}$ |
|---|-------|----------|----------|
| 1 | 30    | 4        | 10       |
| 2 | 20    | 3        | 8        |
| 3 | 36    | 6        | 11       |
| 4 | 24    | 4        | 9        |
| 5 | 40    | 8        | 12       |

c)

| t | $Y_t$ | $X_{t1}$ | $X_{t2}$ |
|---|-------|----------|----------|
| 1 | 4     | 2,5      | 20       |
| 2 | 3     | 2        | 10       |
| 3 | 6     | 2,5      | 0        |
| 4 | 1     | 4        | 10       |
| 5 | 3     | 4        | 20       |

d)

| t | $Y$ | $X_{t1}$ | $X_{t2}$ |
|---|-----|----------|----------|
| 1 | 10  | 0,6      | 10       |
| 2 | 9   | 0,5      | 8        |
| 3 | 11  | 0,9      | 8        |
| 4 | 13  | 1,1      | 9        |
| 5 | 12  | 1,0      | 8        |
| 6 | 15  | 1,2      | 7        |
| 7 | 14  | 0,9      | 5        |
| 8 | 16  | 1,3      | 4        |
| 9 | 17  | 1,5      | 4        |

e)

| t  | Y   | X <sub>t1</sub> | X <sub>t2</sub> | X <sub>t3</sub> |
|----|-----|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1  | 110 | 28              | 1               | 25              |
| 2  | 125 | 30              | 3               | 20              |
| 3  | 150 | 48              | 4               | 22              |
| 4  | 175 | 50              | 2               | 26              |
| 5  | 180 | 52              | 1               | 20              |
| 6  | 190 | 49              | 5               | 25              |
| 7  | 200 | 55              | 3               | 28              |
| 8  | 210 | 58              | 4               | 30              |
| 9  | 220 | 66              | 3               | 33              |
| 10 | 250 | 72              | 6               | 37              |

#### Zad. 4

Zinterpretuj oszacowania otrzymanych współczynników strukturalnych z Zad. 3, jeśli zmiennymi są:

- a) Y – średnia temperatura powietrza [°C]  
X<sub>1</sub> – temperatura powietrza przy gruncie [°C]  
X<sub>2</sub> – temperatura powietrza na wysokości 3 m nad gruntem [°C]
- b) Y – roczna pensja [tys. zł]  
X<sub>1</sub> – lata nauki po zakończeniu szkoły średniej [lata]  
X<sub>2</sub> – staż pracy w przedsiębiorstwie [lata]
- c) Y – wiek szczura [lata]  
X<sub>1</sub> – odległość między uszami [cm]  
X<sub>2</sub> – długość ogona [cm]
- d) Y – cena akcji spółki „Batman” [zł]  
X<sub>1</sub> – obroty spółki „Batman” [mln zł]  
X<sub>2</sub> – liczba zatrudnionych osób w spółce [setki osób]
- e) Y – wartość mieszkania [tys. zł]  
X<sub>1</sub> – metraż [m<sup>2</sup>]  
X<sub>2</sub> – piętro  
X<sub>3</sub> – roczne dochody kupującego [tys. zł]

#### Zad. 5

Wykorzystując podane częściowe obliczenia oszacuj parametry strukturalne modelu liniowego  $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \varepsilon_t$ .

$$a) (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}, \sum y_t^2 = 56;$$

$$b) (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,25 & -0,05 & -0,1 \\ -0,05 & 0,49 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,09 \end{bmatrix}, \sum y_t = 40, \sum y_t x_{1t} = 50, \sum y_t x_{2t} = 100,$$

$$\sum y_t^2 = 2815;$$

$$c) (X^T X)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2,25 & 5 & -6 \\ 5 & 7 & -12 \\ -6 & -12 & 15 \end{bmatrix}, \sum y_t = 30, \sum y_t x_{1t} = 15, \sum y_t x_{2t} = 22 ;$$

$$d) (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} ;$$

$$e) (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,4 \\ * & 0,2 & -0,1 \\ * & * & 0,8 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} 18 \\ 33 \\ 11 \end{bmatrix} ;$$

$$f) (X^T X)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & -10 \\ * & 10 & 6 \\ * & * & 10 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix} ;$$

$$g) X^T X = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -1 & 3 & 6 \\ -10 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \sum y_t = 15, \sum y_t x_{1t} = 9, \sum y_t x_{2t} = 6 ;$$

$$h) X^T X = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \end{bmatrix} ;$$

$$i) X^T X = \begin{bmatrix} 6 & 129 & 43 \\ 129 & 4815 & 1605 \\ 43 & 1605 & 535 \end{bmatrix}, X^T Y = \begin{bmatrix} 91 \\ 86 \\ 73 \end{bmatrix} ;$$

$$j) X^T X = \begin{bmatrix} 8 & 45 & 10 & 32 \\ & 349 & 72 & 158 \\ & & 104 & 33 \\ & & & 242 \end{bmatrix}, \sum y_t = 43, \sum y_t x_{1t} = 83, \sum y_t x_{2t} = 73 ,$$

$$\sum y_t x_{3t} = 103.$$

### Zad. 6

W poniższej tabeli zebrano obserwacje następujących zmiennych:  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ .

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2     | 2     | 2     | 0     | 11    |
| 1     | 4     | 2     | -1    | 13    |
| 0     | 3     | 2     | 1     | 13    |
| 1     | 6     | 2     | -2    | 14    |
| 3     | 5     | 2     | 0     | 12    |

Oszacuj modele:

- a)  $\hat{X}_2 = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_3$
- b)  $\hat{X}_4 = b_0 + b_1 X_2 + b_2 X_5$
- c)  $\hat{X}_1 = c_0 + c_1 X_2 + c_2 X_3 + c_3 X_5$

### Zad. 7

Czy podana poniżej macierz mogłaby być macierzą  $(X^T X)^{-1}$  dla modelu  $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$ ?

- a) [9]
- b)  $\begin{bmatrix} 6 & 1,25 \\ 1,25 & 3 \end{bmatrix}$
- c)  $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
- d)  $\begin{bmatrix} -0,26 & 0,12 \\ 0,12 & -0,04 \end{bmatrix}$
- e)  $\frac{1}{41} \cdot \begin{bmatrix} 15 & -17 \\ -17 & 22 \end{bmatrix}$

### Zad. 8

Czy podana poniżej macierz mogłaby być macierzą  $(X^T X)^{-1}$  dla modelu:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \varepsilon_t$$

- a)  $\frac{1}{50} \cdot \begin{bmatrix} -16 & 22 \\ 22 & -24 \end{bmatrix}$

$$b) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c) \frac{1}{63} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 9 & -18 \\ 9 & 44 & -46 \\ -18 & -46 & 71 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} -0,5 & -7 & 9 \\ -1,5 & -16 & 21 \\ 2 & 24 & -31 \end{bmatrix}$$

### Zad. 9

Dany jest model  $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ . Mamy następujące informacje:

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{80} \cdot \begin{bmatrix} 22 & * & * \\ -14 & 30 & 0 \\ * & * & 36 \end{bmatrix}, \quad \sum_{t=1}^{14} x_{1t} y_t = 11, \quad \sum_{t=1}^{14} x_{2t} y_t = -5, \quad \bar{y}_t = 0,5, \text{ wartość wyrazu}$$

wolnego równa jest 1. Oszacuj pozostałe parametry modelu.

### Zad. 10

Dla modeli z Zad. 1, Zad. 3 oraz Zad. 6 dokonaj regresji w programie Excel i odczytaj wartości oszacowanych parametrów  $a_i$ . Sprawdź czy wszystkie wyniki pokrywają się z Twoimi wcześniejszymi obliczeniami.

### Zad. 11\*

Zbuduj model ekonometryczny popytu na nowe samochody osobowe (segmentu B) w latach 2002-2015. Zbierz dane rzeczywiste (np. z Banku Danych Lokalnych), a następnie dla poniższych zmiennych dokonaj regresji w programie Excel i odczytaj wartości oszacowań parametrów modelu  $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{4t} + \varepsilon_t$ , gdzie:

$Y_t$  – samochody osobowe [w szt.],

$X_{1t}$  – cena kursu samochodowego kat. "B" [w zł],

$X_{2t}$  – przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto [w zł],

$X_{3t}$  – cena benzyny silnikowej [w zł],

$X_{4t}$  – cena biletu normalnego jednorazowego na przejazd autobusem miejskim [w zł].

KONIEC