



KURS FUNKCJE

LEKCJA 1 ROZSZERZONA Definicja i własności funkcji

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Która z poniższych liczb należy do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{1 - \sqrt[6]{4 - x}}$?

- a) 0
- b) 3
- c) 4
- d) 8

Pytanie 2

Jeśli dziedziną funkcji f jest zbiór liczb naturalnych, to zbiór wartości tej funkcji:

- a) musi być również zbiorem liczb naturalnych
- b) może być zbiorem liczb rzeczywistych
- c) może być zbiorem jednoelementowym
- d) zawiera tylko liczby dodatnie

Pytanie 3

Okresem podstawowym funkcji f nazywamy:

- a) zbiór liczb naturalnych należących do dziedziny funkcji f
- b) zbiór wielokrotności ustalonej liczby podstawowej należącej do dziedziny funkcji f
- c) dowolną dodatnią liczbę T , taką że dla każdej liczby x należącej do dziedziny liczba $x+T$ również należy do dziedziny i zachodzi równość $f(x) = f(x+T)$
- d) najmniejszą dodatnią liczbę T , taką że dla każdej liczby x należącej do dziedziny liczba $x+T$ również należy do dziedziny i zachodzi równość $f(x) = f(x+T)$



Pytanie 4

Spośród poniżej zdefiniowanych funkcji wskaż tę, która jest funkcją okresową:

- a) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej sumę jej dzielników.
- b) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 5.
- c) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej należącej do przedziału $\langle 0, 100 \rangle$ jej cyfrę jedności.
- d) Funkcja f przyporządkowuje każdemu pierwiastkowi jego miejsce w układzie okresowym.

Pytanie 5

Wskaż zdanie prawdziwe:

- a) Istnieje nieskończenie wiele funkcji, które są jednocześnie parzyste i nieparzyste.
- b) Dziedziną funkcji parzystej może być zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- c) Zbiorem wartości funkcji parzystej nie może być zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
- d) Funkcję, która nie jest parzysta, nazywamy nieparzystą.

Pytanie 6

Aby funkcja była różnowartościowa musi być spełniony warunek:

- a) Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje inną wartość.
- b) Dla każdego argumentu funkcja przyjmuje tę samą wartość.
- c) Dla dwóch argumentów funkcja przyjmuje różne wartości.
- d) Dla dwóch argumentów funkcja przyjmuje te same wartości.

Pytanie 7

Warunkiem koniecznym, aby funkcje f i g były równe jest:

- a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$
- b) $f(0) = g(0)$
- c) $D_f = D_g$
- d) $ZW_f = ZW_g$



Pytanie 8

Funkcja okresowa nie może być funkcją:

- a) parzystą
- b) nieparzystą
- c) stałą
- d) różnowartościową

Pytanie 9

Wskaż zdanie prawdziwe:

- a) Każda funkcja stała jest nieparzysta.
- b) Każda funkcja stała jest różnowartościowa.
- c) Jeśli funkcja jest stała, to jest niemonotoniczna.
- d) Istnieje funkcja stała, która ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Pytanie 10

$$\text{Funkcja } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in (-\infty, -2) \\ x + 2, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ x - 2, & x \in (2, +\infty) \end{cases} :$$

- a) nie ma miejsc zerowych
- b) ma jedno miejsce zerowe
- c) ma dwa miejsca zerowe
- d) ma trzy miejsca zerowe

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Wykaż, że:

- a) funkcja $f(x) = 2x^2 + 3$ jest rosnąca w zbiorze $x \in \langle 0, +\infty \rangle$
- b) funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$ jest malejąca w zbiorze $x \in (0, +\infty)$
- c) funkcja $f(x) = 10 - x^2$ jest rosnąca w zbiorze $x \in (-\infty, 0)$
- d) funkcja $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ jest rosnąca
- e) funkcja $f(x) = -\sqrt{3-x}$ jest rosnąca
- f) funkcja $f(x) = 2x^2 + 8x$ jest malejąca w zbiorze $x \in (-\infty, -2)$
- g) funkcja $f(x) = \frac{4}{5-x}$ jest rosnąca w zbiorze $x \in (5, +\infty)$
- h) funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$ nie jest malejąca w zbiorze $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zad. 2

Zbadaj monotoniczność funkcji.

- a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ w przedziale $x \in (-2, +\infty)$
- b) $f(x) = \frac{4-x}{x-5}$ w przedziale $x \in (-\infty, 5)$
- c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$ w przedziale $x \in \langle -2, +\infty \rangle$
- d) $f(x) = 16x - 4x^2$ w przedziale $x \in \langle 2, +\infty \rangle$

**Zad. 3**

Na podstawie informacji o funkcji f podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz okres podstawowy.

- a) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 10.
- b) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x
- c) $f(x) = 10$
- d) $f(x) = \cos x$
- e) $f(x) = 2 \sin x \cos x$

Zad. 4

Zbadaj, czy podana funkcja jest parzysta lub nieparzysta.

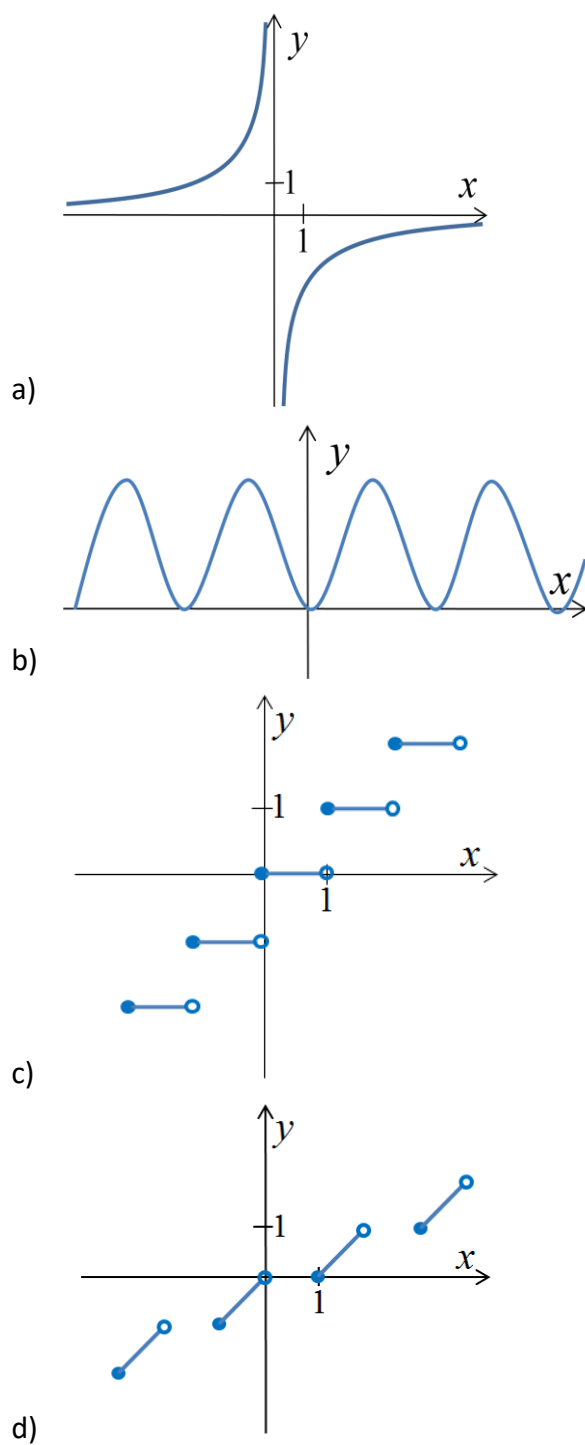
- a) $f(x) = x^2 - 4$
- b) $f(x) = -4x + 1$
- c) $f(x) = -4x$
- d) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}$
- e) $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}$
- f) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$
- g) $f(x) = -6$
- h) $f(x) = \sqrt{x - 3}$
- i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

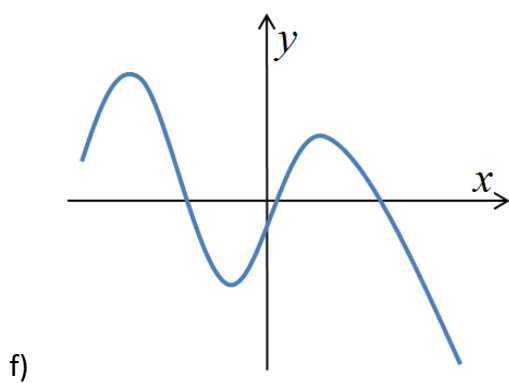
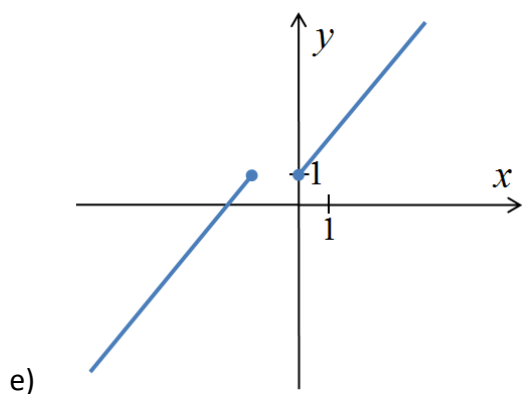
Zad. 5

Wykaż, że jedyną funkcją, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, jest funkcja $f(x) = 0$.

Zad. 6

Określ, czy dana funkcja jest różnowartościowa czy nie jest różnowartościowa:





Zad. 7

Wykaż z definicji, że podana funkcja jest różnowartościowa:

a) $f(x) = 5 - 3x$

b) $f(x) = -\frac{6}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+1}$

d) $f(x) = \frac{2-\sqrt{2}x}{x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = 5\sqrt{x+4}$

Zad. 8

Wykaż, że podana funkcja nie jest różnowartościowa:

- a) $f(x) = 2x^2 - 3$
- b) $f(x) = \frac{x^4}{1-x^2}$
- c) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej jej część ułamkową.
- d) Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej liczbę jej dzielników.

Zad. 9

Sprawdź, czy podane funkcje f i g są równe:

- a) $f(x) = x + 5$, $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
- b) $f(x) = \frac{x^4 - 9}{x^2 + 3}$, $g(x) = x^2 - 3$
- c) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$, $g(x) = |2x + 1|$
- d) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

Zad. 10

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f :

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 4 - x, & x \in (2, 4) \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 18, & x \in (-\infty, 0) \\ 12 - 4x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \in \langle -5, 0 \rangle \\ 3 - \sqrt{x}, & x \in \langle 0, 12 \rangle \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2, & |x| \geq 4 \\ x^2 - 9, & x \in (-4, -3) \cup (3, 4) \\ x^2, & x \in \langle -3, 3 \rangle \end{cases}$

Zad. 11

Naszkicuj wykres funkcji f :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -2) \\ -2x - 2, & x \in (-2, 2) \\ x - 8, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-2}, & x \in (-\infty, -2) \\ 0, & x \in (-2, 2) \\ \sqrt{x-2}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = |x+2| + |x-2| - 6$$

$$\text{d) } f(x) = |x-5| + |3x-6| - 2|x|$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{|x+4|}{x+4}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

Zad. 12

Wyznacz wzór funkcji f bez użycia wartości bezwzględnej:

$$\text{a) } f(x) = |3x-9|$$

$$\text{b) } f(x) = 2|x-1| + 3|x-3|$$

$$\text{c) } f(x) = 3|x+2| - |x-5| - 2|4-x|$$

$$\text{d) } f(x) = |x^2 - 25|$$

$$\text{e) } f(x) = |x^2 - 9| - |x^2 - 16|$$

KONIEC