



KURS FUNKCJE

LEKCJA 5 ROZSZERZONA

Funkcja wymierna, wykładnicza
i logarytmiczna

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Funkcję $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ nazywamy funkcją:

- a) homogeniczną
- b) homograficzną
- c) homologowaną
- d) homonimiczną

Pytanie 2

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ są proste:

- a) $x = a, y = c$
- b) $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$
- c) $x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c}$
- d) $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{d}$

Pytanie 3

Która z poniższych funkcji ma dwie asymptoty?

- a) $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$
- b) $f(x) = \frac{2x+4}{x+2}$
- c) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+1}$
- d) $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$

Pytanie 4

Funkcja $f(x) = (2 - \sqrt{3})^x$ jest funkcją:

- a) rosnącą
- b) malejącą
- c) stałą
- d) niemonotoniczną

Pytanie 5

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 2$ jest zbiór:

- a) $\mathbb{R}$
- b) $\mathbb{R}_+$
- c) $(-4, +\infty)$
- d) $(-2, +\infty)$

Pytanie 6

Jeśli wykres funkcji $f(x) = 4^x$ przekształcimy przez symetrię osiową względem osi OY , to otrzymamy wykres funkcji:

- a) $g(x) = -4^x$
- b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- c) $g(x) = |4^x|$
- d) $g(x) = 4^{|x|}$

Pytanie 7

Funkcja $f(x) = \log_{5-2\sqrt{3}} x$ jest funkcją:

- a) rosnącą
- b) malejącą
- c) stałą
- d) niemonotoniczną

Pytanie 8

Dziedziną funkcji $f(x) = \log_{x^2-16} \frac{x+3}{6-x}$ jest zbiór:

- a) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
- b) $(-3, 6)$
- c) $(4, 6)$
- d) $(4, \sqrt{17}) \cup (\sqrt{17}, 6)$

Pytanie 9

Dziedziną funkcji $f(x) = \log_3(x^2 - mx + 4)$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy:

- a) $m > 0$
- b) $m < 4$
- c) $m > -4$
- d) $m \in (-4, 4)$

Pytanie 10

Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = \log_a x$ dla $a > 0$, $a \neq 1$ są symetryczne względem prostej:

- a) $x = 0$
- b) $y = 0$
- c) $y = x$
- d) $y = -x$

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Wyznacz dziedzinę funkcji wymiernej f :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

e) $f(x) = \frac{(x^5 + 1)^3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

f) $f(x) = \frac{3}{-2x^2 + 3x - 2}$

Zad. 2

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych:

a) $f(x) = \frac{2x}{mx^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{mx - 2}{x^2 + mx + 4}$

Zad. 3

Zbadaj, czy funkcje f i g są równe:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = x$

b) $f(x) = 3 - x$, $g(x) = \frac{9 - x^2}{x + 3}$

c) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2 + 1}$, $g(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 - 1}$, $g(x) = x^2 - 1$

Zad. 4

Naszkicuj wykres funkcji homograficznej f . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, równania asymptot i przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{x + 4}{x + 2}$

b) $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$

c) $f(x) = \frac{-4x + 2}{x - 1}$

d) $f(x) = \frac{-x + 3}{x + 2}$

Zad. 5

O funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax + 2}{x + b}$ wiadomo, że jej miejscem zerowym jest liczba 4, a asymptotą pionową wykresu jest prosta $x = -2$.

- a) wyznacz wartości parametrów a i b ,
- b) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f ,
- c) wyznacz równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji f .

Zad. 6

O funkcji homograficznej $f(x) = \frac{-x+a}{x+b}$ wiadomo, że jest rosnąca dla $x \in (-\infty, 4)$ oraz dla $x \in (4, +\infty)$, a do jej wykresu należy punkt $A = (-1, 2)$.

- a) wyznaczyć wzór funkcji f ,
- b) wyznaczyć równania asymptot wykresu funkcji f .

Zad. 7

Naszkiej wykres funkcji f :

- a) $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} - 2 \right|$
- b) $f(x) = \left| \frac{2x+5}{x+2} \right| - 1$
- c) $f(x) = \frac{|x|+2}{|x|-2}$
- d) $f(x) = \frac{2|x|-1}{|x|+1}$
- e) $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$

Zad. 8

Wykaż, że wykresy funkcji $f(x) = 0,75^x$ oraz $g(x) = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$ są symetryczne względem osi OY .

Zad. 9

Zbadaj parzystość funkcji:

- a) $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$
- b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^x$

Zad. 10

Wyznacz zbiór wartości funkcji f :

- a) $f(x) = 2^{x+4} - 3$
- b) $f(x) = -3^{-x}$
- c) $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- d) $f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + 1$
- e) $f(x) = 2 \cdot 9^x + 4 \cdot 3^x + 6$
- f) $f(x) = -16^x + 2 \cdot 4^x - 1$

Zad. 11

Naszkicuj wykres funkcji f :

- a) $f(x) = 2^{|x|}$
- b) $f(x) = -2^{|x|} + 4$
- c) $f(x) = |-2^x + 2|$
- d) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 1\right|$
- e) $f(x) = 4^{-\frac{1}{2}x} + 2$
- f) $f(x) = 2^{-|x| - |x-1|}$

Zad. 12

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$. Podaj, jakie wartości osiąga dla argumentów $x = \frac{1}{3}$ oraz $x = 9$. Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 4.

Zad. 13

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Podaj, jakie wartości osiąga dla argumentów $x = \frac{1}{8}$ oraz $x = 4$. Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość (-1) .

Zad. 14

Wyznacz dziedzinę funkcji f :

- a) $f(x) = \log_2(16 - x^2)$
- b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4x - 10)$
- c) $f(x) = \log_4 \frac{2x}{x-3}$
- d) $f(x) = \log_{x+1}(2 - x)$
- e) $f(x) = \log_{x^2}(25 - x^2)$
- f) $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2 + 3x - 4)$

Zad. 15

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych:

- a) $f(x) = \log_2(x^2 + m)$
- b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + mx + 4)$

Zad. 16

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja:

- a) $f(x) = \log_{m+2} x$ jest rosnąca
- b) $f(x) = \log_{4-m} x$ jest malejąca

Zad. 17

Sprawdź, czy funkcje f i g są równe:

- a) $f(x) = \log_5(x^2 - 1)$, $g(x) = \log_5(x - 1) + \log_5(x + 1)$
- b) $f(x) = \log_{\pi} \frac{x-2}{4-x}$, $g(x) = \log_{\pi}(x - 2) - \log_{\pi}(4 - x)$
- c) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \frac{1}{2} \log_3 x^2$

**Zad. 18**

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\log_2 |x|$. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji f .

Zad. 19

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{0,25}(x+3) - 2$. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz punkty przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych. Wyznacz argument, ale którego funkcja f przyjmuje wartość (-3) .

Zad. 20

Naszkicuj wykres funkcji f :

- a) $f(x) = \log_3(x+4) - 2$
- b) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(-x)$
- c) $f(x) = \log_4 \frac{1}{x}$
- d) $f(x) = \log_2 \frac{x^2-4}{x-2}$
- e) $f(x) = \log_2(x^2 - 6x) - \log_2(6-x)$
- f) $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}}(x+5) \right| - 1$

Zad. 21

Wykaż na podstawie definicji, że:

- a) funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca dla $x \in \mathbb{R}$
- b) funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest malejąca dla $x \in \mathbb{R}$
- c) funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca dla $x \in (0, +\infty)$
- d) funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca dla $x \in (0, +\infty)$

KONIEC