Ekstrema (lokalne) funkcji dwóch zmiennych
SCHEMAT

f(x,y) = ...
(dziedzina)

I. Wyznaczenie punktów stacjonarnych

1. Liczymy pochodne cząstkowe I-go rzędu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ?$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

2. Przyrównujemy te pochodne do zera, tworząc układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

3. Układ rozwiązujemy, mamy rozwiązania (o ile istnieją)

$$\begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases} \quad \text{lub} \quad \ldots$$

4. Każde rozwiązanie to tzw. „punkt stacjonarny”, czyli taki, w którym może (ale nie musi) być ekstremum. Wypisujemy je (nie należące do dziedziny oczywiście odrzucamy):

$$P_1(x,y) \quad P_2(x,y) \quad P_3(x,y) \quad \ldots$$

Współrzędne x,y do punktów bierzemy z rozwiązań układu (pkt. I.3)

eTrapez Usługi Edukacyjne E-learning Krystian Karczyński
www.etrapez.pl
Tel. (91) 350 75 79, 603 088 274

II. Badanie istnienia ekstremów w punktach stacjonarnych

1. Liczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dots$$

(uwaga: pochodne mieszane powinny wyjść takie same)

2. Z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu tworzymy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$ (uwaga: wyznacznik złożony z FUNKCJI)

3. Do utworzonego wyznacznika wstawiamy jeden po drugim współrzędne kolejnych punktów stacjonarnych, liczymy więc:

$$W(P_1)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) \end{vmatrix}$$ (uwaga: wyznacznik złożony z LICZB)

- jeśli $W(P_1) > 0$ wtedy w punkcie P_1 funkcja osiąga ekstremum
- jeśli $W(P_1) < 0$ wtedy w punkcie P_1 funkcja nie osiąga ekstremum
- jeśli $W(P_1) = 0$ nie możemy roztrzygnąć, czy w punkcie P_1 funkcja osiąga ekstremum

$W(P_2) = \dots$

itd.

$W(P_3) = \dots$

4. Zajmujemy się już tylko punktami, w których funkcja osiągnęła ekstremum (na przykład powiedzmy, że był to punkt P_1). Określamy,

czy są to minima, czy maksima lokalne:

$$\begin{matrix} jeśli\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(P_1) > 0 - wP_1 mamy MINIMUM \\ jeśli\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(P_1) < 0 - wP_1 mamy MAKSIMUM \end{matrix}$$

, oraz liczymy wartości funkcji w tych punktach, podstawiając ich współrzędne do początkowego wzoru na funkcję.

5. Piszemy odpowiedź.