



KURS

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Lekcja 1

Pochodne cząstkowe

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Funkcja dwóch zmiennych...

- a) Przyporządkowuje parom liczb parę liczb
- b) Przyporządkowuje liczbie parę liczb
- c) Przyporządkowuje parom liczb jedną liczbę
- d) Przyporządkowuje liczbę liczbie

Pytanie 2

$$f(x, y) = 2x + y$$

Wyrażenie „liczę pochodną po y”, oznacza że...

- a) Obliczam pochodną, traktując y jak zmienną, a x jak stałą
- b) Obliczam pochodną, traktując x jak zmienną, a y jak stałą
- c) Obliczam pochodną, traktując y jak zmienną, a x ignorując
- d) Obliczam pochodną, przyjmując, że y jest stałą

Pytanie 3

$$\left[\left(\frac{2x}{x+y} \right)^2 \right]'$$

Z jakiego wzoru należy skorzystać w tym momencie, aby policzyć pochodną po x z powyższego wyrażenia (przy założeniu, że liczymy najpierw pochodną funkcji zewnętrznej – jak w prezentacji)?

- a) Ze wzoru na x^2 przy założeniu, że rolę argumentu x pełni $\frac{2x}{x+y}$
- b) Ze wzoru na dzielenie
- c) Ze wzoru na pochodną ze stałej
- d) Ze wzoru na mnożenie stałej przez funkcję (wyciągnięcie stałej przed nawias)



Pytanie 4

$$(8x^4y^2)' = ?$$

Jak obliczyć powyższą pochodną po x ?

- a) $(8x^4y^2)' = 8x^4(y^2)' = 8x^4 2y = 16x^4y$
- b) $(8x^4y^2)' = 0 \cdot (x^4y^2)' = 0$
- c) $(8x^4y^2)' = 8y^2(x^4)' = 8y^2 4x^3 = 32x^3y^2$
- d) $(8x^4y^2)' = (8x^4)'(y^2)' = 32x^3 2y = 64x^3y$

Pytanie 5

$$\left((\sin x)^{\sin y}\right)' = ?$$

Jak policzyć powyższą pochodną po y ?

- a) $\left((\sin x)^{\sin y}\right)' = (\cos x)^{\cos y}$
- b) $\left((\sin x)^{\sin y}\right)' = (e^{\sin x \ln \sin y})' = e^{\sin x \ln \sin y} (\sin x \ln \sin y)' = e^{\sin x \ln \sin y} \ln \sin y (\sin x)' = e^{\sin x \ln \sin y} \ln \sin y \cos x = e^{\sin x \ln \sin y} \cos x \ln \sin y$
- c) $\left((\sin x)^{\sin y}\right)' = \sin y (\sin x)^{\sin y - 1} (\sin x)' = \cos x \sin y (\sin x)^{\sin y - 1}$
- d) $\left((\sin x)^{\sin y}\right)' = (\sin x)^{\sin y} \ln \sin x (\sin y)' = \cos y (\sin x)^{\sin y} \ln \sin x$



Pytanie 6

$$z = x^2 + y^2 - u^2$$

Aby policzyć $\frac{\partial z}{\partial u}$ należy:

- a) Obliczyć pochodną z funkcji za stałą przyjmując u
- b) Obliczyć pochodną z funkcji za stałą przyjmując z i u
- c) Obliczyć pochodną z funkcji za stałą przyjmując x i y
- d) Obliczyć pochodną z funkcji za stałą przyjmując x

Pytanie 7

Jaka jest teza twierdzenia Schwarz'a (dla funkcji dwóch zmiennych)?

- a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$
- c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$
- d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$



Pytanie 8

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y \partial x^2 \partial y \partial x} = ?$$

Aby policzyć powyższą pochodną należy...

- a) Policzyć z funkcji f pochodną po y , później z wyniku pochodną po x , później wynik podnieść do kwadratu, później policzyć z wyniku pochodną po y , a na końcu policzyć z wyniku pochodną po x
- b) Policzyć z funkcji f pochodną po x , później z wyniku pochodną po y , później z wyniku pochodną po x , później wynik podnieść do kwadratu, a na końcu policzyć z wyniku pochodną po y
- c) Policzyć z funkcji f pochodną po x , później z wyniku pochodną po y , później z wyniku pochodną po x , później z wyniku pochodną jeszcze raz po x , a na końcu policzyć z wyniku pochodną po y
- d) Policzyć z funkcji f pochodną po x , później z wyniku pochodną po y , później z wyniku pochodną po x , a na końcu policzyć z wyniku pochodną po y

Pytanie 9

$$z(x, y)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Jaki operacje należy wykonać, żeby sprawdzić, czy funkcja z spełnia dane równanie różniczkowe?

- a) Obliczyć wszystkie jej pochodne do trzeciego rzędu włącznie i sprawdzić, które z nich podstawione do równania spełniają je
- b) Policzyć z funkcji z pochodną po x , później z tego, co nam wyjdzie pochodną po x , później z wyniku pochodną po x , wstawić obliczone pochodne do lewej strony równania i sprawdzić, czy zredukują się do zera
- c) Sprawdzić, czy jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podstawione do lewej strony równania równają się prawej
- d) Sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe (czy zachodzi twierdzenie Schwarz'a)



Pytanie 10

Czy do obliczania pochodnych cząstkowych potrzebne są nam jakieś dodatkowe wzory, oprócz zwykłych wzorów na pochodne?

- a) Nie
- b) Tak

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu z podanych funkcji:

- 1) $z = x^2 + y^3$
- 2) $z = 3x^4y - x^2 + 5y^2$
- 3) $z = \frac{x+y}{x-y}$
- 4) $z = y \sin x$
- 5) $z = x^2y \ln x$
- 6) $z = \ln(x - 2y^2)$
- 7) $z = \arcsin \frac{x}{y}$
- 8) $z = \cos(\ln(x + 2xy))$
- 9) $z = (5x^3y + 5)^3$
- 10) $z = (4x + 8y)^{4x+8y}$
- 11) $u = xy + yz + xyz + 3x - 1$
- 12) $u = \sqrt{x^2 + 3y^2 - z}$
- 13) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$
- 14) $u = z^{xy}$
- 15) $u = \sin^2(x + zy)$

Zad. 2

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu z podanych funkcji:

- 1) $z = 3x^2 + y^2 - xy + 2$
- 2) $z = \arctg(xy)$
- 3) $z = e^{e^xy}$
- 4) $z = x^{\ln y}$
- 5) $u = x^3 + x^2y - 5xyz + z^3$

Zad. 3

Oblicz wskazane pochodne cząstkowe funkcji:

$$1) \quad z = (x + 2y)^3, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = ?$$

$$2) \quad u = e^{x^2 y z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = ?$$

$$3) \quad u = x^5 y^4 z^3, \quad \frac{\partial^6 z}{\partial x \partial z \partial y \partial x \partial z \partial y} = ?$$

Zad. 4

Sprawdź, czy funkcja spełnia równanie:

$$1) \quad z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$2) \quad z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} z$$

$$3) \quad z = xy + e^{\frac{y}{x}}, \quad \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = z + x$$

$$4) \quad z = \ln(e^x + e^y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

$$5) \quad z = \frac{\ln(e^x + 1)}{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

KONIEC