



KURS GEOMETRIA ANALITYCZNA

Lekcja 1
Działania na wektorach bez układu
współrzędnych.

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Jaka jest formalna definicja wektora?

- a) Wektor to uporządkowana para punktów
- b) Wektor to przesunięcie z jednego punktu do drugiego
- c) Wektor to strzałka o początku w jednym punkcie i końcu w drugim
- d) Wektor to para punktów w przestrzeni trójwymiarowej

Pytanie 2

Co oznacza zapis: $|\vec{a}|$?

- a) Długość wektora $\vec{a}$
- b) Wartość bezwzględna z wektora $\vec{a}$
- c) Wektor $\vec{a}$
- d) Iloczyn skalarny wektora $\vec{a}$ przez samego siebie

Pytanie 3

Kiedy dwa wektory są równe?

- a) Kiedy mają taki sam zwrot, kierunek i długość
- b) Kiedy mają taką samą długość
- c) Kiedy są równoległe i mają taką samą długość
- d) Kiedy mają taki sam zwrot i kierunek



Pytanie 4

Jak wyznaczyć można wektory przekątnych równoległoboku?

- a) Dodając i odejmując wektory, na których zbudowany jest równoległobok
- b) Przyjmując za nie wektory, z których zbudowany jest równoległobok
- c) Mnożąc wektorowo wektory, z których zbudowany jest równoległobok
- d) Obliczając pole równoległoboku

Pytanie 5

Co jest wynikiem mnożenia wektora przez liczbę?

- a) Wektor
- b) Liczba

Pytanie 6

Co to jest iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

- a) Wektor prostopadły do nich obu
- b) Liczba będąca długością wektora prostopadłego do nich obu
- c) Liczba $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$
- d) Przeciwność iloczynu wektorowego wektorów



Pytanie 7

Rzut wektora $\vec{a}$ na oś o kierunku wektora $\vec{b}$ zawsze...

- a) Ma taki sam kierunek, jak wektor $\vec{b}$
- b) Ma taki sam zwrot, jak wektor $\vec{b}$
- c) Ma długość mniejszą lub równą od wektora $\vec{b}$
- d) Ma długość różną od wektora $\vec{b}$

Pytanie 8

$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$ jest wzorem na...

- a) Iloczyn wektorowy
- b) Iloczyn skalarny
- c) Długość iloczynu wektorowego
- d) Długość iloczynu skalarnego

Pytanie 9

Pola jakich figur można obliczyć korzystając z iloczynu wektorowego?

- a) Równoległoboku, kwadratu, okręgu
- b) Trójkąta, elipsy, równoległoboku
- c) Trójkąta, równoległoboku, rombu
- d) Kwadratu, prostokąta, czworokąta



Pytanie 10

Czy prawdą jest, że zawsze: $\vec{b} \circ (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \circ (\vec{b} \times \vec{a})$?

a) Nie

b) Tak

Część 2: ZADANIA

Zad.1

Dany jest równoległobok ABCD oparty na wektorach $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p}$ i $\overrightarrow{AD} = 4\vec{q}$. M jest punktem przecięcia się przekątnych równoległoboku. Wyznacz wektory: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$ przy pomocy wektorów $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

Zad. 2

Dany jest romb ABCD. Wektory $\overrightarrow{AC} = 7\vec{p}$ i $\overrightarrow{BD} = 3\vec{q}$ stanowią przekątne rombu. Wyraż za pomocą wektorów $\vec{p}$ i $\vec{q}$ wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

Zad. 3

Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

a) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 7, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

b) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

c) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

d) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 5, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}\pi$

e) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \pi$

**Zad. 4**

Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 6\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 10\vec{q}$, przy czym $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad. 5

Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = -3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = -2\vec{p} + 10\vec{q}$, przy czym $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.6

Znaleźć długość wektora $\vec{a} = -3\vec{p} + 4\vec{q}$ wiedząc, że $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.7

Znaleźć długość wektora $\vec{a} = 12\vec{p} - 16\vec{q}$ wiedząc, że $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.8

Znaleźć długość wektora $\vec{a} = -2\vec{p} + 5\vec{q}$, jeżeli wiadomo, że $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\angle \vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Zad.9

Znaleźć długość wektora $\vec{x} = 3\vec{m} - \vec{n}$, jeżeli wiadomo, że $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\angle \vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

**Zad.10**

Obliczyć długość przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ i

$\vec{b} = -\vec{p} - 2\vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi, pomiędzy którymi kąt równy jest $\frac{\pi}{6}$.

Zad.11

Obliczyć kąt pomiędzy wektorami $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b}$ jeżeli wiadomo, że $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.12

Obliczyć kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli wiadomo, że wektory $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{q} = -4\vec{a} + 5\vec{b}$ są wzajemnie prostopadłe, oraz wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają tę samą długość.

Zad.13

Wyznacz taką wartość parametru α , dla której wektory $\vec{a} = \alpha \vec{p} + 4\vec{q}$ i $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ są wzajemnie prostopadłe, jeśli wiadomo, że $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, (\angle \vec{p}, \vec{q}) = \frac{2}{3}\pi$.

Zad.14

Znajdź rzut wektora $\vec{a}$ na oś o kierunku wektora $\vec{b}$, jeżeli $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}\pi$.

Zad.15

Znajdź rzut wektora $\vec{m} = 2\vec{p} - 4\vec{q}$ na wektor $\vec{n} = \vec{p} + \vec{q}$, jeżeli wiadomo, że wektory $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

**Zad.16**

$\vec{p}, \vec{q}$ i $\vec{r}$ są trójką wektorów jednostkowych wzajemnie prostopadłych, mających orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

Uprość wyrażenia:

a) $(\vec{p} - \vec{q}) \times (3\vec{r} + \vec{p}) + \vec{q} \times (3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r})$

b) $(5\vec{p} + 2\vec{q}) \times (\vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r})$

c) $(2\vec{p} - 4\vec{q}) \times (-3\vec{p} - 4\vec{r})$

Zad.17

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wzajemnie jednostkowe, a kąt pomiędzy nimi wynosi 30° . Oblicz:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 - \vec{a} \circ \vec{b}$$

Zad.18

Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{b} = -3\vec{p} - 7\vec{q}$, gdzie

$\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.19

Dany jest równoległobok ABCD, zbudowany na wektorach $\vec{AB} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$ i $\vec{AD} = 10\vec{a} + \vec{b}$.

Oblicz długość wysokości DE równoległoboku, wiedząc, że $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, (\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

**Zad.20**

Oblicz pole trójkąta ABC opartego na wektorach $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 5\vec{n}$ i $\overrightarrow{BC} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, wiedząc, że wektory $\vec{m}$ i $\vec{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi.

Zad.21

Wiedząc, że pole trójkąta zbudowanego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równe jest 4, oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{x} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{y} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Zad.22

Sprawdź, czy wektory są $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarne (leżą na jednej płaszczyźnie), jeżeli wektory

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ nie są komplanarne:

a) $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}, \quad \vec{b} = 2\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}, \quad \vec{c} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - 2\vec{r}$

b) $\vec{a} = -2\vec{p} - 4\vec{q} + 2\vec{r}, \quad \vec{b} = -4\vec{p} - 4\vec{q} - 4\vec{r}, \quad \vec{c} = -6\vec{p} - 16\vec{q} + 14\vec{r}$

Zad.23

Wektory $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ są jednostkowe i wzajemnie prostopadłe. Oblicz objętość czworościanu opartego na wektorach: $\vec{a} = -\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \quad \vec{b} = -2\vec{p} + 9\vec{q} - 2\vec{r}, \quad \vec{c} = 2\vec{p} - 4\vec{q} + 2\vec{r}$.



Zad.24

Oblicz wysokość ostrosłupa ABCD opuszczoną z wierzchołka D, mając dane:

$\overrightarrow{AB} = \vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{x} + 5\vec{y} + 4\vec{z}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{x} + 3\vec{y} + 5\vec{z}$ i wiedząc, że wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ są jednostkowe i wzajemnie prostopadłe.

KONIEC