



KURS GRAFY (WYBRANE ZAGADNIENIA)

LEKCJA 5 Droga i cykl Hamiltona

Odpowiedzi do zadania domowego



Część 1: TEST

- 1) b
- 2) a
- 3) b
- 4) d
- 5) c
- 6) d
- 7) b
- 8) b
- 9) d
- 10) a

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

Zad. 1

- a) posiada drogę (np. *efdcba*) oraz cykl Hamiltona (np. *efdcbae*)
- b) posiada drogę (np. *aefdcbg*), lecz nie posiada cyklu Hamiltona
- c) nie posiada drogi, ani cyklu Hamiltona (graf nie jest spójny!)
- d) posiada drogę (np. *plfghiabjcdekoutnwmr*) oraz cykl Hamiltona (np. *plfghiabjcdekoutnwmrp*)

Zad. 2

a) Graf jest hamiltonowski, np. cykl *eadbce*.

Wierzchołek	Stopień
<i>a</i>	3
<i>b</i>	3
<i>c</i>	3
<i>d</i>	3
<i>e</i>	2

Stopień wierzchołka *e* jest mniejszy od $n / 2 = 2,5$, więc graf nie spełnia wszystkich założeń warunku dostatecznego 1 - ale jest hamiltonowski.

b) Graf jest hamiltonowski, np. cykl *afbcdea*.

Wierzchołek	Stopień
<i>a</i>	3
<i>b</i>	4
<i>c</i>	2
<i>d</i>	4
<i>e</i>	3
<i>f</i>	4

Stopień wierzchołka *c* jest mniejszy od $n / 2 = 3$, więc graf nie spełnia wszystkich założeń warunku dostatecznego 1 - ale jest hamiltonowski.

Zad. 3

Graf G: Żadnego z wierzchołków nie trzeba usunąć, cykl Hamiltona to np. *adcefgba*.

Graf K: Należy usunąć wierzchołek *f* lub *g*, wówczas przykładowy cykl Hamiltona to *agcbdea* (usuwając wierzchołek *f*).

Zad. 4

a)

Liczba krawędzi, wymagana przy założeniu warunku dostatecznego 2 dla tego grafu: 12

Liczba krawędzi w tym grafie: 12

Czy, graf spełnia założenia warunku dostatecznego 2 oraz jest hamiltonowski? **TAK** / ~~NIE~~

b)

Liczba krawędzi, wymagana przy założeniu warunku dostatecznego 2 dla tego grafu: 17

Liczba krawędzi w tym grafie: 12

Czy, graf spełnia założenia warunku dostatecznego 2 oraz jest hamiltonowski? ~~TAK~~ / **NIE**

Zad. 5

- a) Graf posiada drogę Hamiltona – *dbcaikjlegfh*, jednakże, aby posiadał cykl Hamiltona należy dorysować krawędź między wierzchołkami *d* oraz *h*.
- b) Graf posiada drogę Hamiltona np. *afinljmkhcegdb*, jednakże, aby graf był hamiltonowski wystarczy wówczas dorysować krawędź między wierzchołkiem *a* oraz *b* (jest to jedno z możliwych rozwiązań).
- c) Graf posiada drogę Hamiltona, np. *abedc*, dorysowując krawędź między wierzchołkami *c* oraz *a* otrzymujemy graf hamiltonowski.

Zad. 6

a) Graf jest hamiltonowski, przykładowy cykl to 1,8,6,7,5,3,4,9,2,1.

Para wierzchołków v,w	$\deg(v) + \deg(w)$
1,6	8
1,3	7
1,4	8
1,9	7
2,7	9
2,6	9
2,5	10
3,8	7
3,7	7
3,6	7
3,9	6
4,6	8
4,7	8
4,8	8
5,8	9
5,9	8
7,9	7
8,9	7

Warunek dostateczny 3 nie stwierdza jednak w tym przypadku istnienia grafu hamiltonowskiego.

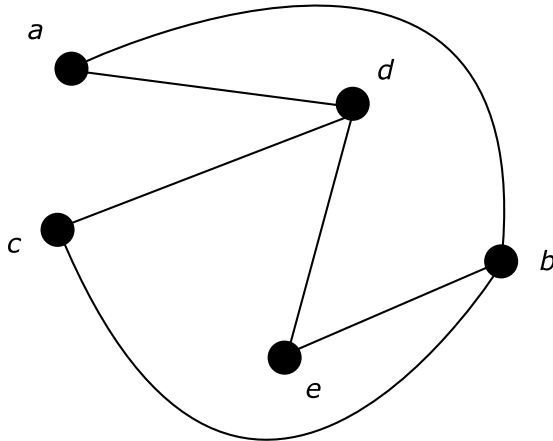
b) Graf jest hamiltonowski, istnieje cykl, np. 3,7,5,6,2,1,4,3.

Para wierzchołków v,w	$\deg(v) + \deg(w)$
1,3	6
1,5	4
1,6	5
1,7	5
2,4	6
2,5	5
2,7	6
3,5	6
4,5	5
4,6	6
6,7	6

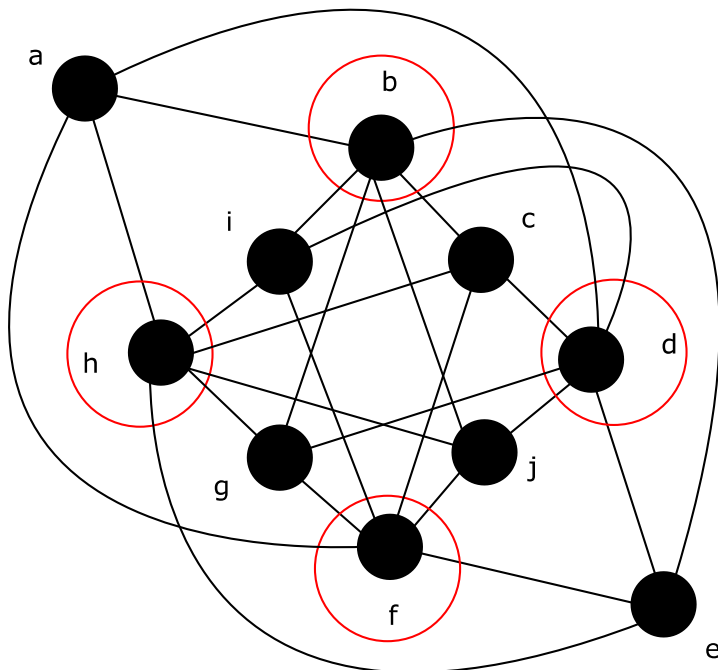
Ponownie, warunek 3 nie stwierdza istnienia grafu hamiltonowskiego.

Zad. 7

- a) Jednym zbiorem jest $\{d, b\}$, natomiast drugim $\{a, c, e\}$.

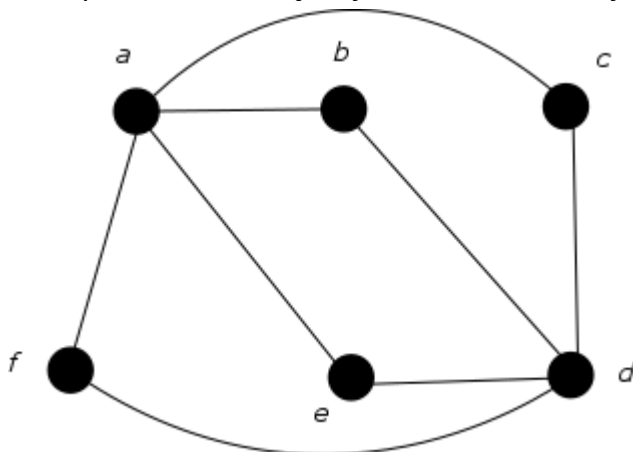


- b) Jednym zborem jest $\{b, d, f, h\}$, natomiast drugim $\{a, c, e, g, i, j\}$. Dla ułatwienia wierzchołki z pierwszego zbioru zostały zaznaczone.



Zad. 8

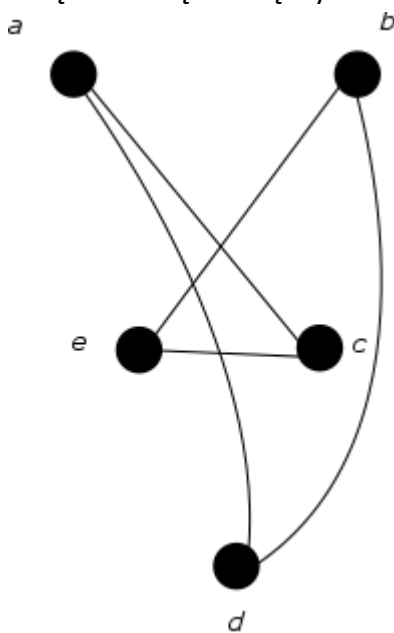
- a) Należy zamienić krawędź bf na ac , oraz bc na df .



- b) Należy usunąć krawędzie ad , cf (jednym zbiorem wierzchołków jest zbiór $\{b, f, d\}$, natomiast drugim $\{a, c, e\}$).

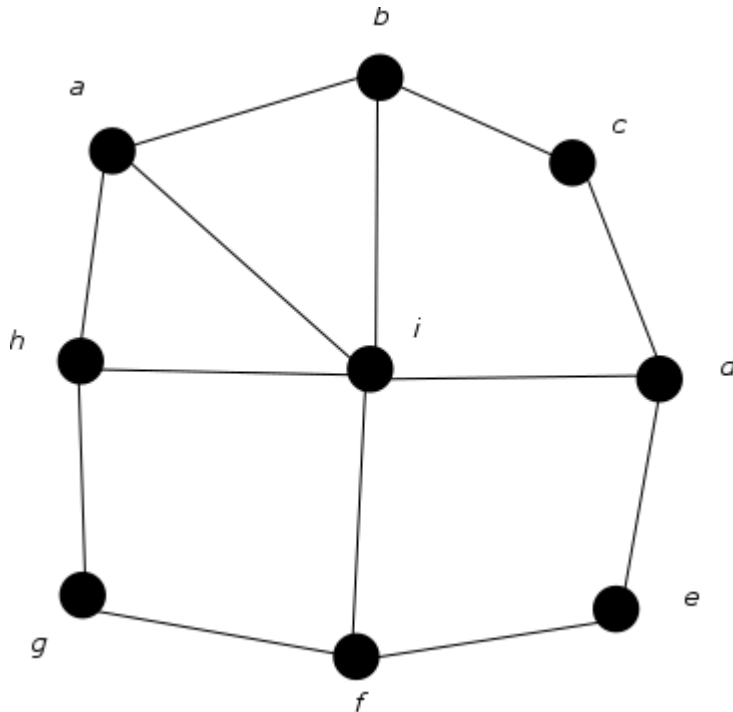
Zad 9.

- a) Po usunięciu krawędzi między ac dopełnienie grafu wygląda następująco:



Ten graf jest hamiltonowski.

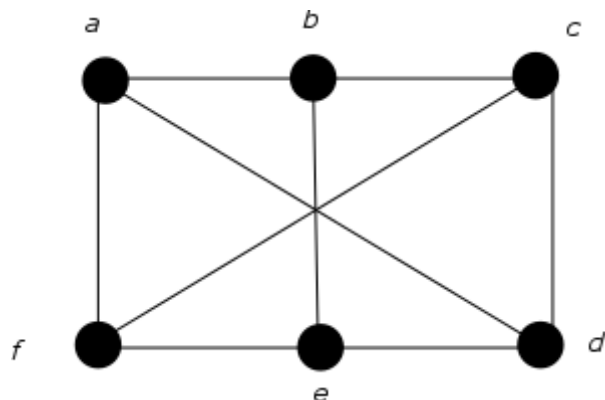
b) Należy usunąć, np. krawędź ai , wówczas dopełnienie grafu wygląda następująco:



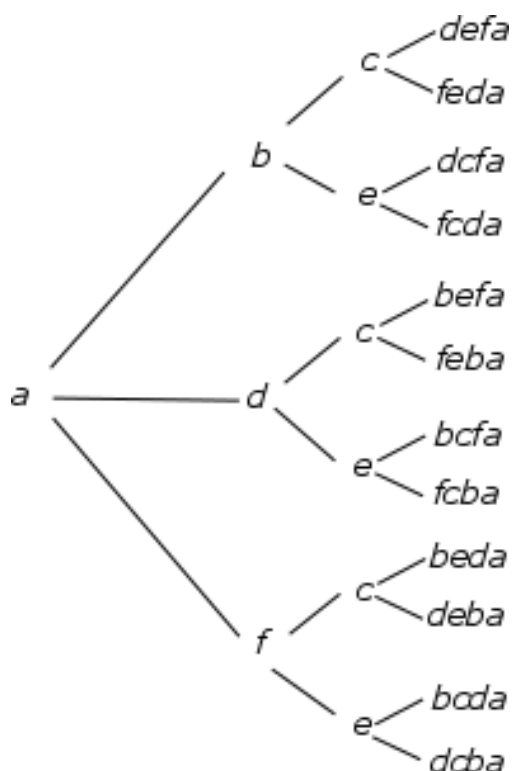
Ten graf jest hamiltonowski.

Zad. 10

Dla wyobrażenia rozwiązania weźmy graf:



Następnie rozważmy tylko przypadek dla wierzchołka *a*:



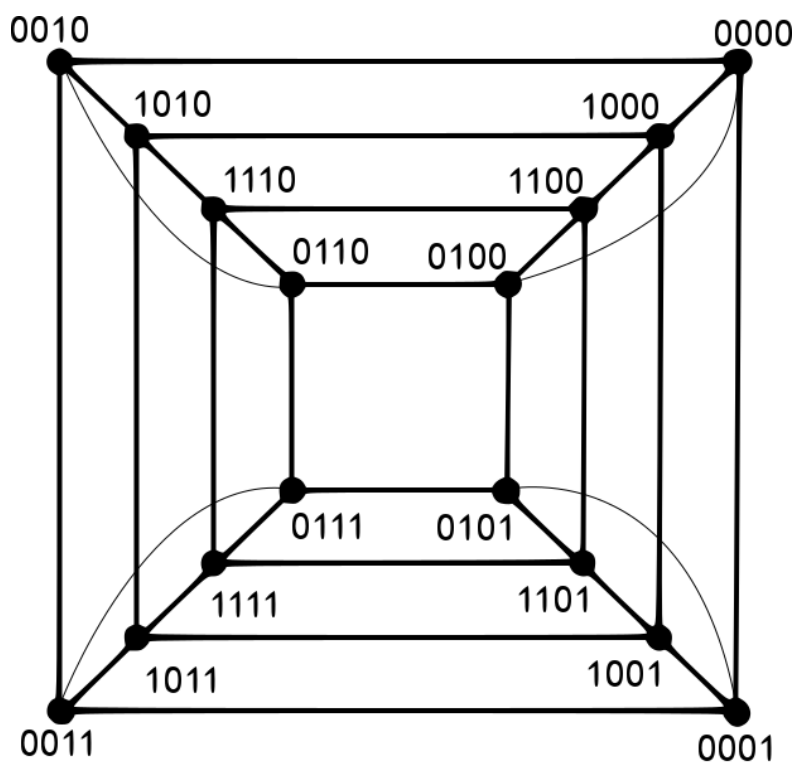
Liczba możliwych cykli dla tego wierzchołka wynosi 12, zatem liczba możliwych cykli w tym grafie wynosi $6 \cdot 12 = 72$.

Zad. 11

Kod Graya długości 4:

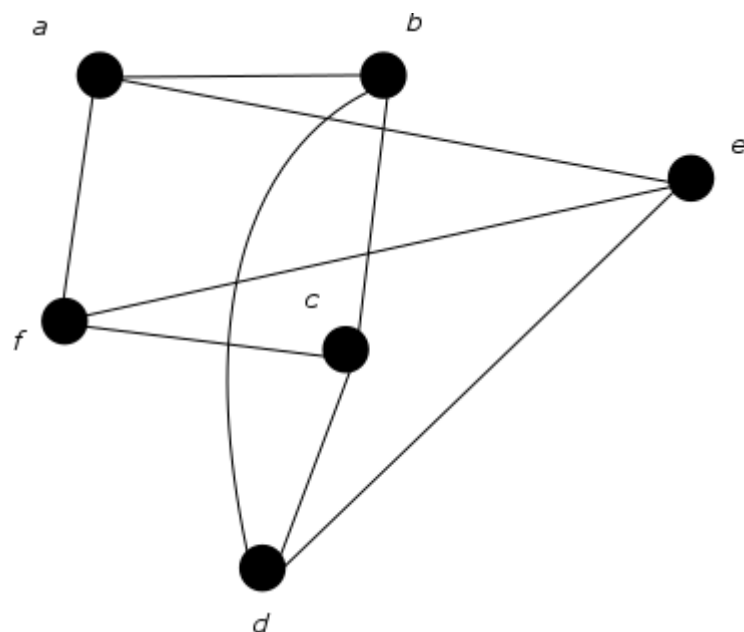
0000	1111
0001	1110
0011	1100
0010	1101
1010	0101
1000	0111
1001	0110
1011	0100

Graf odpowiadający temu kodowi:



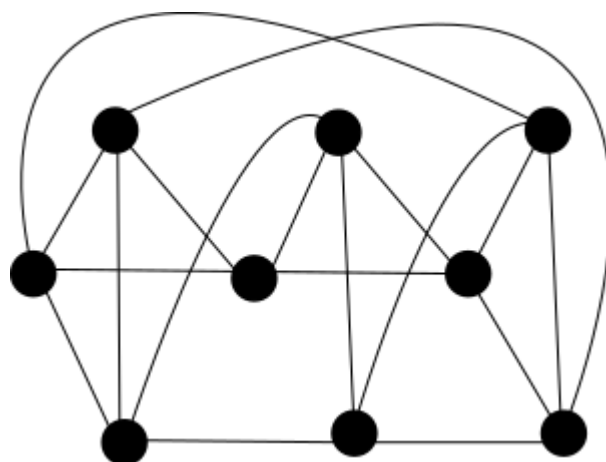
Zad. 12

a) Możliwe rozwiązanie – dorysowujemy krawędź ef oraz bd :



Stopień grafu regularnego: 3

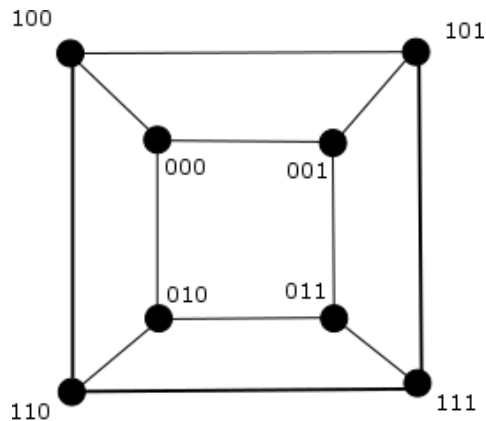
b) Możliwe rozwiązanie:



Stopień grafu regularnego: 4

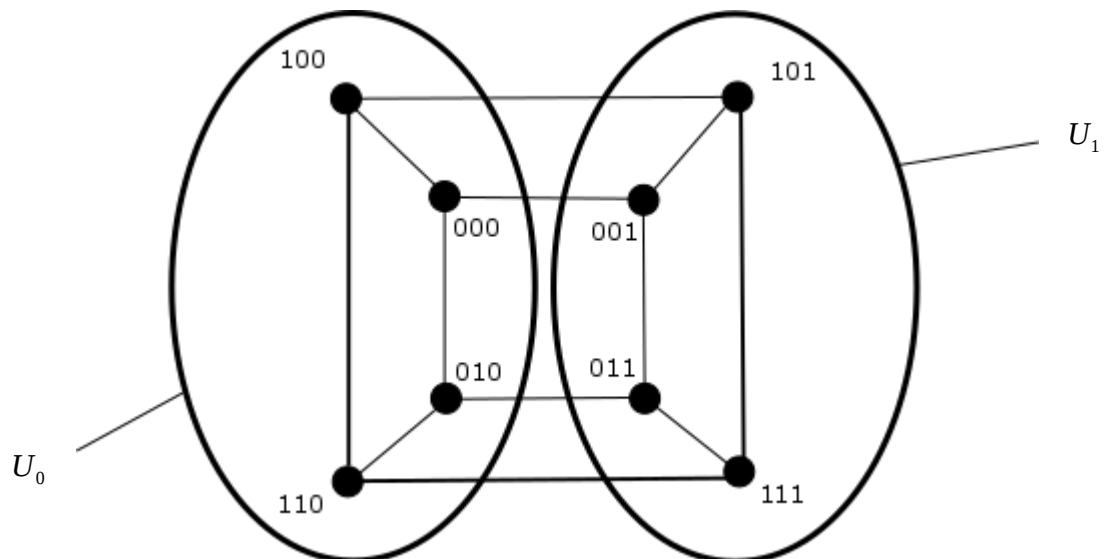
Zad. 13

Dowód przeprowadzimy stosując indukcję względem n . Przykładowy graf:



Dowód:

1. Dla grafu G_{n+1} bierzemy podgraf U_0 , gdzie $V(U_0)$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków grafu G_{n+1} , w których na ostatnim ($n+1$ miejscu) stoi 0, $E(U_0)$ jest zbiorem krawędzi grafu G_{n+1} , które łączą wierzchołki w podgrafie U_0 .
2. Analogicznie tworzymy podgraf U_1 .



3. Grafy U_0 oraz U_1 są izomorficzne, ponieważ każdej parze połączonych krawędzią wierzchołków w grafie U_0 odpowiada taka sama para w grafie U_1 (oczywiście, etykiety nie są brane pod uwagę rozważając izomorfizm grafów).
4. Możemy zauważyć, że z grafu U_0 jak i z grafu U_1 możemy stworzyć graf G_n , tak więc są one izomorficzne z G_n .

Wierzchołki grafu		
U_0	U_1	G_n
100	101	10
000	001	00
010	011	01
110	111	11

5. Skoro grafy U_0 oraz U_1 są izomorficzne, są podgrafami grafu G_{n+1} oraz są izomorficzne z grafem G_n to muszą istnieć grafy zbudowane na podstawie kodu Graya dla dowolnego n .

Zad. 14

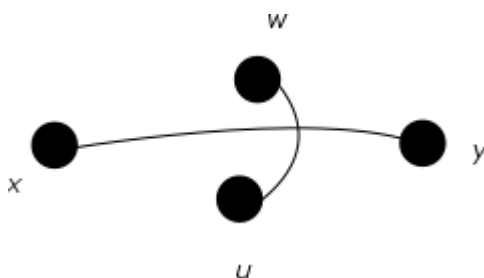
Założenia:

Rozpatrzmy dwa przypadki:

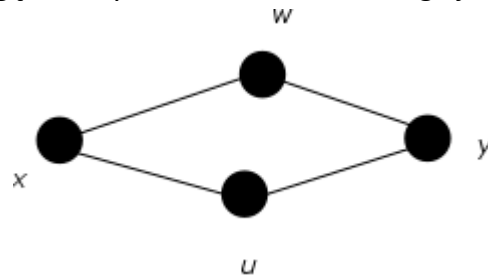
- Istnieje graf G mający 2 wierzchołki $\{x, y\}$, które są niepołączone.
- Istnieje graf G mający co najmniej dwie składowe $\{x, y\}, \{w, v\}$. Oznacza to, że istnieją dwie krawędzie: między wierzchołkami $\{x, y\}$ oraz między wierzchołkami $\{w, v\}$.

Dowód:

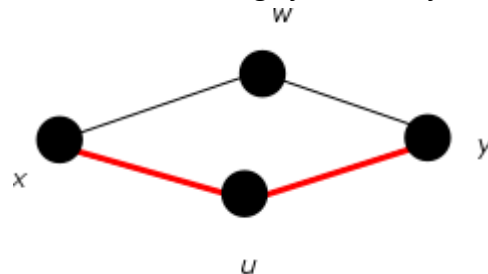
1. Pierwszy przypadek jest trywialny, dopełnienie grafu G to dwa wierzchołki $\{x, y\}$ połączone krawędzią.
2. Drugi przypadek:



- a. W grafie G , dwie dowolne składowe nie są połączone krawędzią. W dopełnieniu grafu G dowolny wierzchołek z jednej składowej, tworzy drogę z każdym wierzchołkiem z drugiej składowej.



- b. W ten sposób dwa dowolne wierzchołki z jednej składowej są połączone przez wierzchołek z drugiej składowej.



- c. W przypadku większej ilości składowych możemy prowadzić drogi przez kilka składowych. W ten sposób, w żadnej ze składowych z grafu G nie ma wierzchołka, który nie byłby połączony drogą z wierzchołkiem ze swojej składowej oraz z wierzchołkami z innych składowych, tak więc dopełnienie grafu G jest grafem spójnym.

KONIEC