



KURS GRAFY (WYBRANE ZAGADNIENIA)

LEKCJA 5 Droga i cykl Hamiltona

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Drogę nazywamy drogą Hamiltona, jeżeli...

- a) ma co najmniej 5 wierzchołków
- b) przechodzi przez każdy wierzchołek grafu
- c) przechodzi przez każdą krawędź grafu
- d) łączy dwa grafy

Pytanie 2

W cyklu Hamiltona...

- a) pierwszy i ostatni wierzchołek jest ten sam
- b) liczba wierzchołków zawsze odpowiada liczbie krawędzi
- c) muszą istnieć co najmniej dwie drogi Hamiltona
- d) największy stopień każdego z wierzchołków wynosi maksymalnie 2

Pytanie 3

Które ze zdań poniżej nie jest założeniem jednego z warunków dostatecznych istnienia cyklu Hamiltona (n odpowiada liczbie wierzchołków, rozważany graf nie posiada pętli, ani krawędzi wielokrotnych)?

- a) graf musi posiadać $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ krawędzi
- b) graf musi posiadać $(n-1)n$ krawędzi
- c) dla każdej pary wierzchołków v, w nie połączonych krawędzią, zachodzi nierówność $\deg(v) + \deg(w) \geq n$
- d) muszą zachodzić nierówności $n \geq 3$ oraz $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka v



Pytanie 4

Kodem Graya o długości n nazywamy...

- a) ciąg wszystkich liczb binarnych do liczby n włącznie
- b) ciąg liczb o różnicy równej 1 i ilości wyrazów wynoszącej n , ustawionych w taki sposób, że dwie kolejne kombinacje w ciągu różnią się dokładnie jedną cyfrą i ostatnia różni się jedną cyfrą od pierwszej
- c) graf hamiltonowski, w którym istnieje tylko jeden cykl, a ilość wierzchołków wynosi n
- d) ciąg wszystkich 2^n różnych kombinacji n cyfr 0 i 1, ustawionych w taki sposób, że dwie kolejne kombinacje w ciągu różnią się dokładnie jedną cyfrą i ostatnia różni się jedną cyfrą od pierwszej

Pytanie 5

Graf dwudzielny...

- a) posiada parzystą liczbę wierzchołków
- b) możemy zawsze podzielić na dwa grafy o takiej samej ilości wierzchołków i krawędzi
- c) posiada zbiór wierzchołków, które możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory, takie, że każda krawędź grafu łączy wierzchołek z jednego zbioru z wierzchołkiem z drugiego zbioru
- d) jest zawsze grafem hamiltonowskim

Pytanie 6

Dopełnienie grafu to taki graf, który...

- a) zawsze posiada taką samą ilość krawędzi jak graf pierwotny, ale różną ilość wierzchołków
- b) zawsze posiada taką samą ilość krawędzi i wierzchołków jak graf pierwotny
- c) jest grafem dwudzielnym
- d) posiada taką samą ilość wierzchołków jak graf pierwotny

Pytanie 7

Graf posiadający cykl Hamiltona...

- a) musi mieć parzystą liczbę wierzchołków
- b) musi posiadać zamkniętą drogę Hamiltona
- c) zawsze posiada co najmniej jedną pętlę
- d) musi posiadać taką samą ilość krawędzi, co wierzchołków



Pytanie 8

Graf, który jest hamiltonowski posiada...

- a) co najmniej 4 wierzchołki
- b) cykl Hamiltona
- c) drogę Hamiltona, ale niekoniecznie cykl
- d) 10 krawędzi

Pytanie 9

Pełny graf dwudzielny...

- a) jest grafem pełnym
- b) nie jest spójny
- c) musi być podgrafem grafu zbudowanego przy wykorzystaniu kodu Graya
- d) jest grafem dwudzielnym

Pytanie 10

Graf pełny...

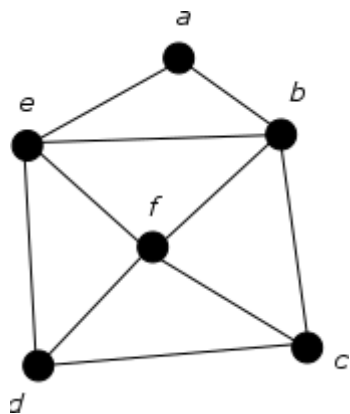
- a) jest hamiltonowski o ile $n \geq 3$, gdzie n to liczba wierzchołków
- b) jest zawsze hamiltonowski, bez dodatkowych założeń
- c) nie może być grafem hamiltonowskim
- d) jest grafem dwudzielnym

Część 2: ZADANIA

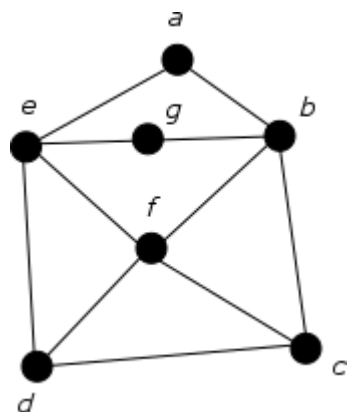
Zad. 1

Sprawdź, czy graf ma drogę, cykl Hamiltona. Jeżeli tak, wskaż je (przykładowe, nie trzeba wypisywać wszystkich).

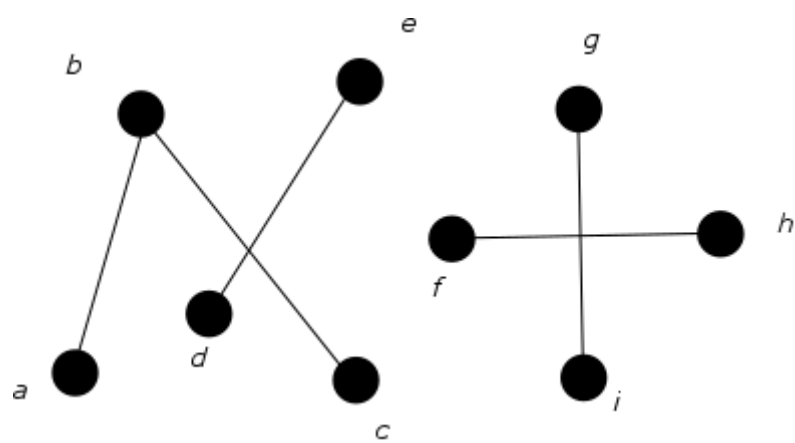
a)



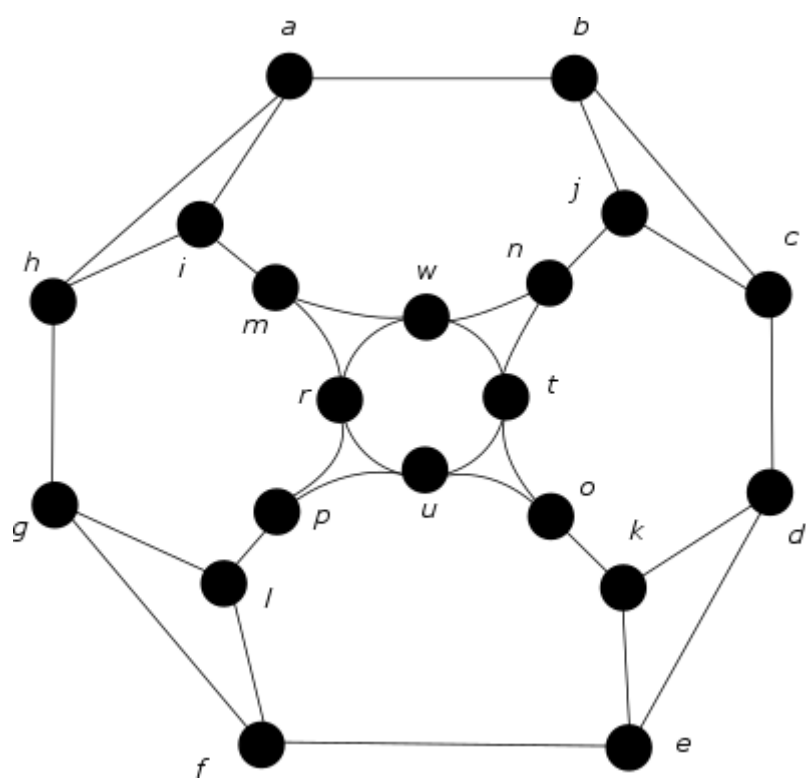
b)



c)



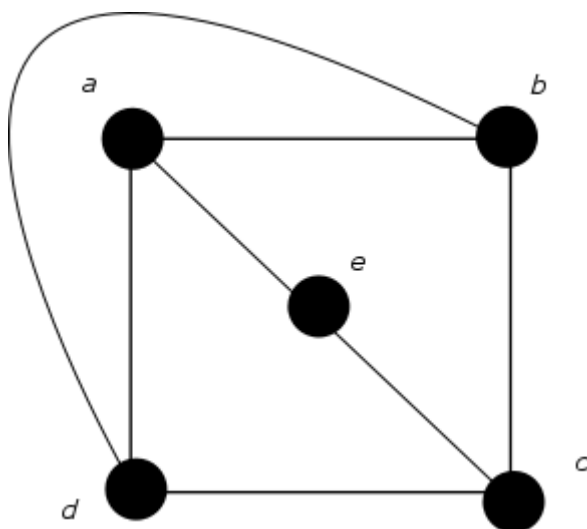
d)



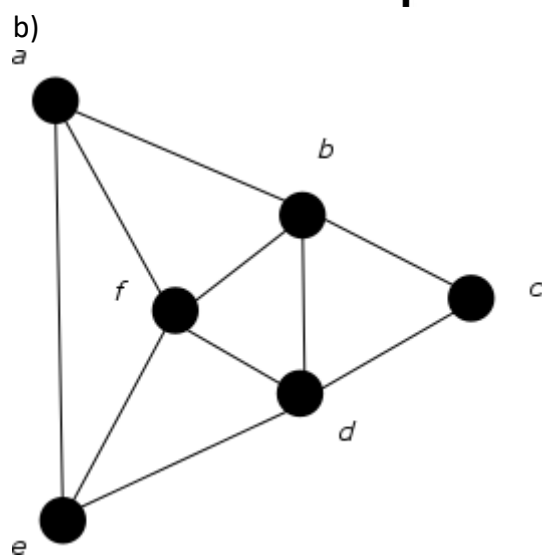
Zad. 2

Sprawdź, czy grafy są hamiltonowskie (znajdując cykl Hamiltona, lub przy pomocy dowolnego warunku dostatecznego, lub koniecznego). Następnie, wypełniając tabelki, sprawdź, czy grafy spełniają warunek dostateczny 1. Czy dzięki warunkowi dostatecznemu 1, da się zawsze określić, czy graf jest hamiltonowski?

a)



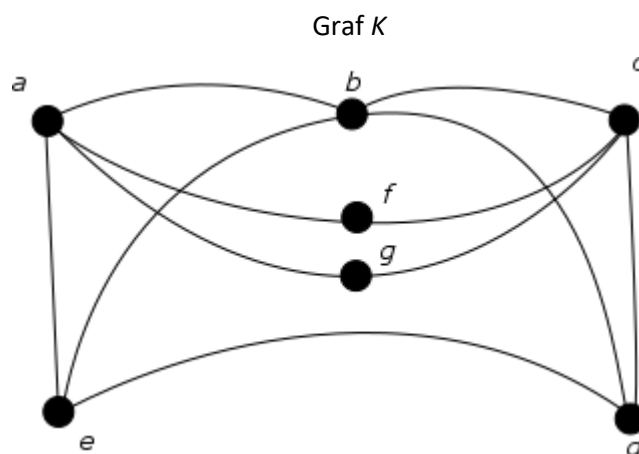
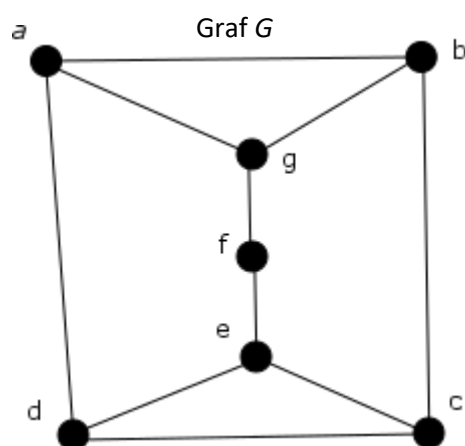
Wierzchołek	Stopień
a	
b	
c	
d	
e	



Wierzchołek	Stopień
a	
b	
c	
d	
e	
f	

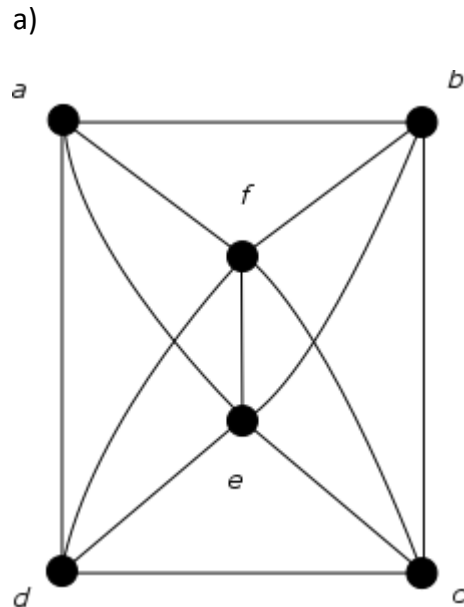
Zad. 3

Podaj, dla poniższych grafów, który (przykładowo) wierzchołek należy usunąć (lub nie), tak, aby graf miał cykl Hamiltona.



Zad. 4

Sprawdź, czy podane grafy są hamiltonowskie, oraz, czy spełniają warunek wystarczający (dostateczny) nr 2 – uzupełnij zdania pod grafami.



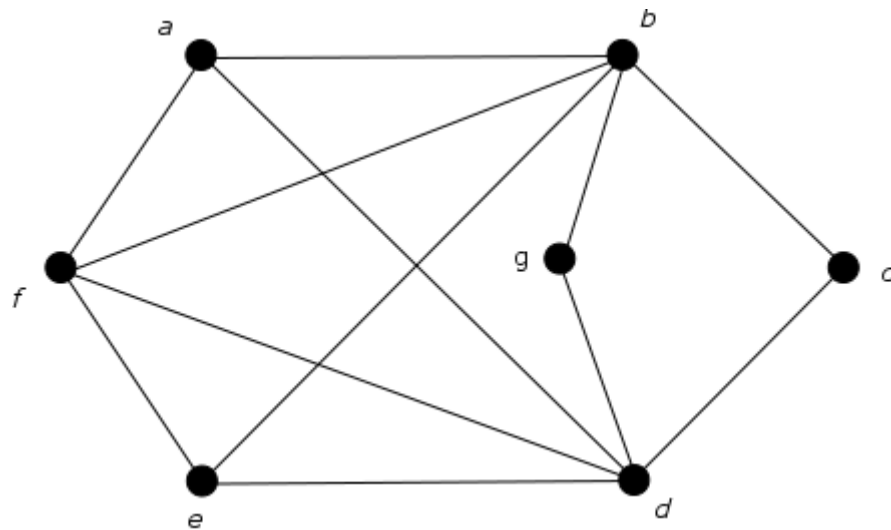
Liczba krawędzi, wymagana przy założeniu warunku dostatecznego 2 dla tego grafu:

Liczba krawędzi w tym grafie:

Czy dzięki warunkowi dostatecznemu 2 możemy stwierdzić, że ten graf jest hamiltonowski?

TAK / NIE

b)



Liczba krawędzi wymagana przy założeniu warunku dostatecznego 2 dla tego grafu

Liczba krawędzi w tym grafie

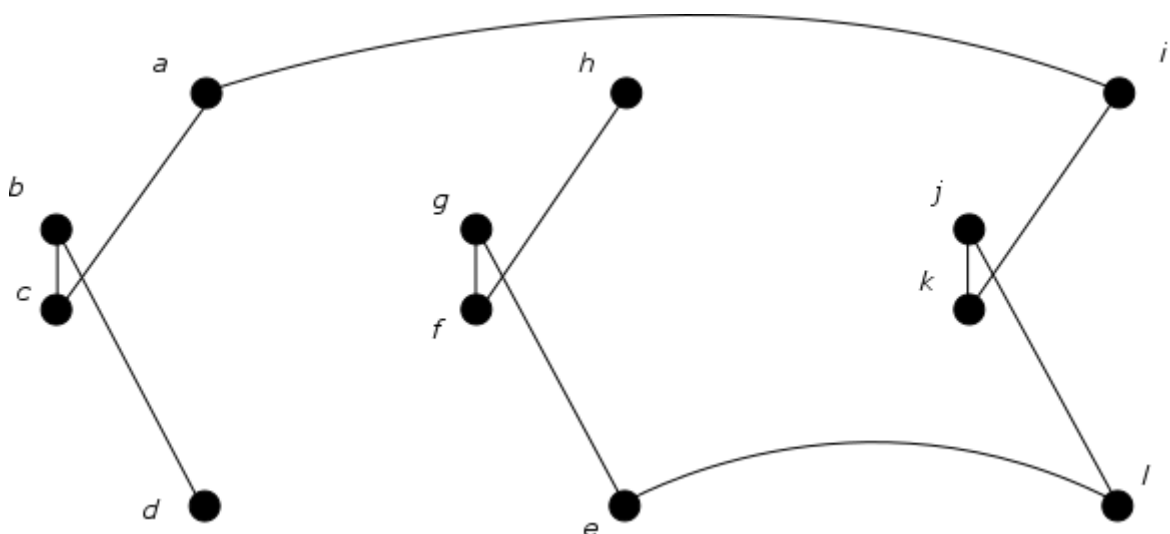
Czy dzięki warunkowi dostatecznemu 2 możemy stwierdzić, że ten graf jest hamiltonowski?

TAK / NIE

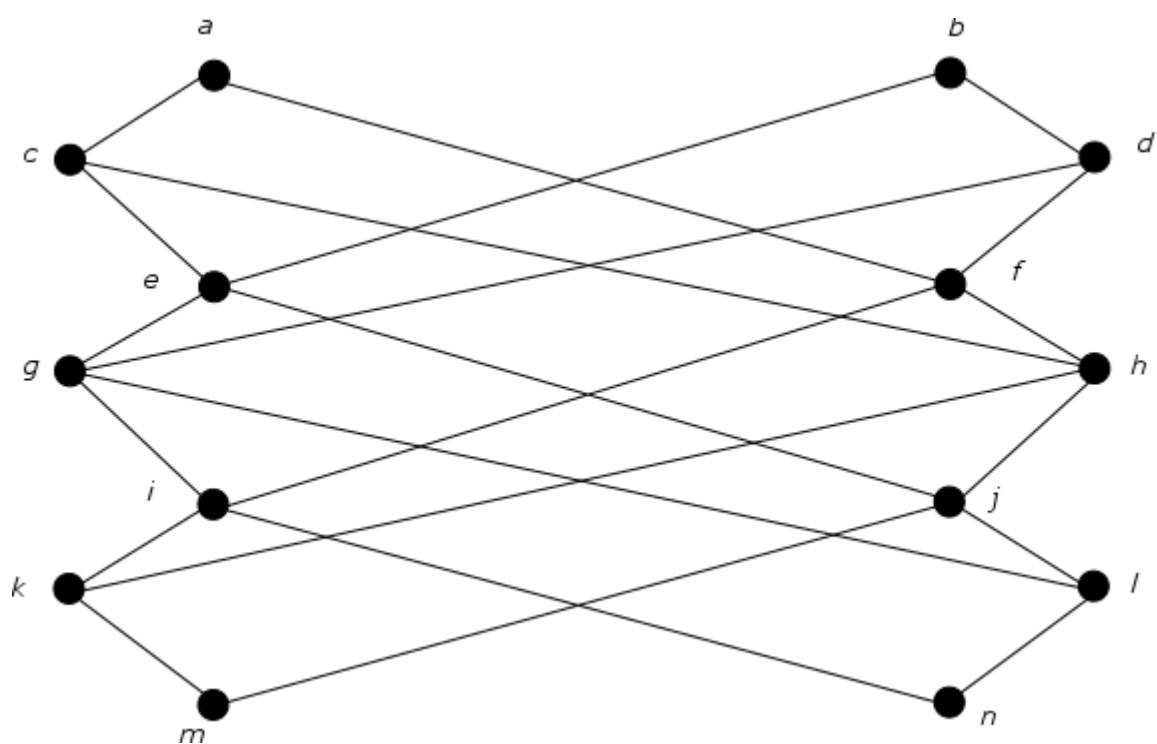
Zad. 5

Czy grafy narysowane poniżej posiadają drogę, oraz cykl Hamiltona? Jeżeli grafy nie są hamiltonowskie dorysuj krawędź w taki sposób, aby graf posiadał cykl Hamiltona.

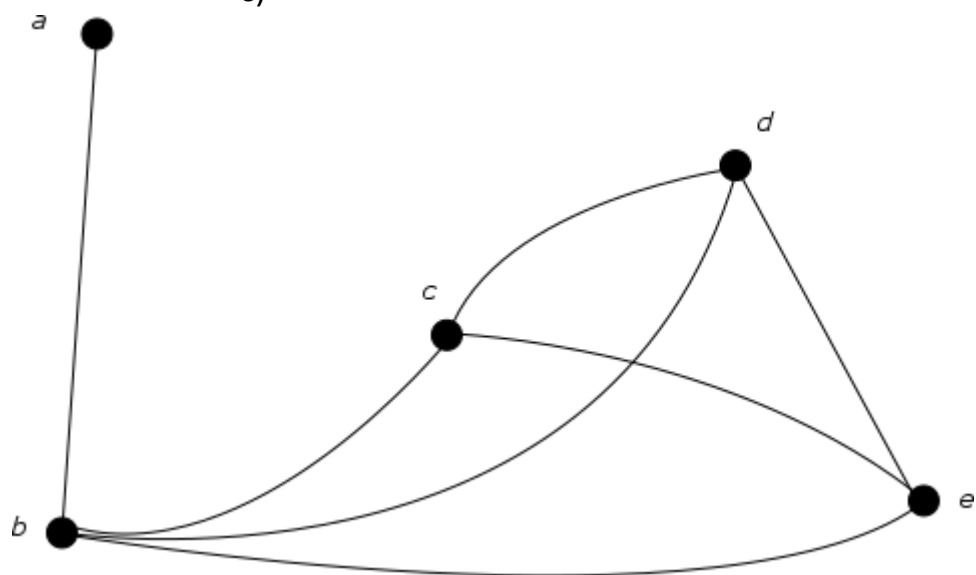
a)



b)



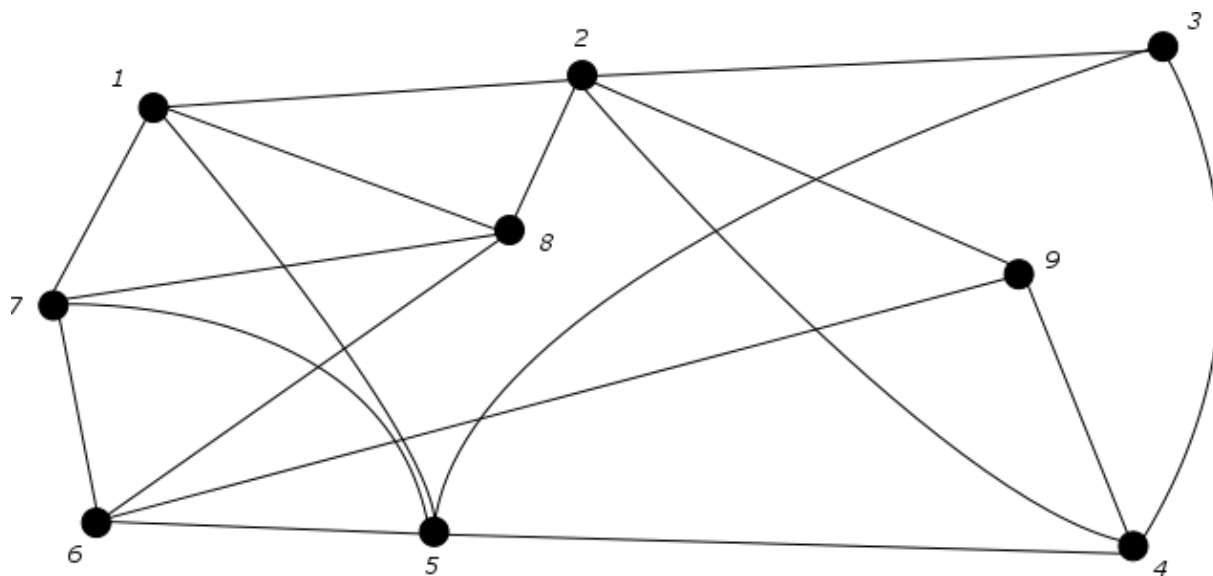
c)



Zad. 6

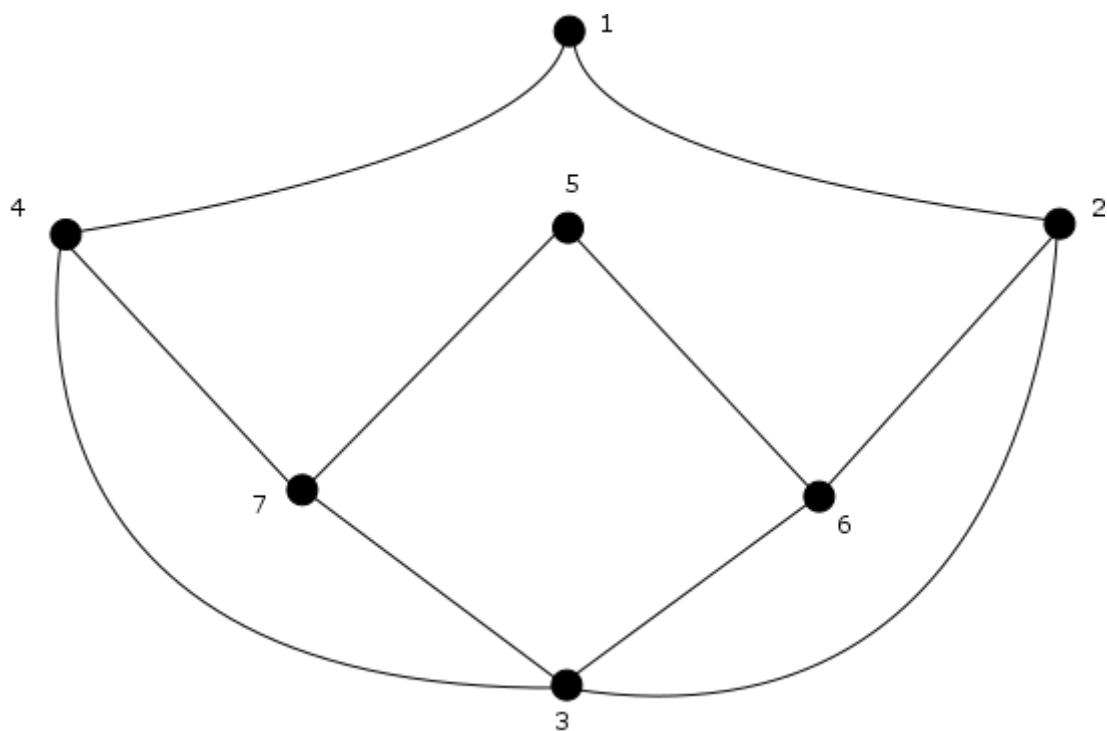
Oceń, czy grafy są hamiltonowskie, następnie sprawdź, czy w przedstawionych grafach spełniony jest warunek dostateczny 3. Czy dzięki warunkowi dostatecznemu 3 możemy zawsze stwierdzić istnienie grafu hamiltonowskiego?

a)



Para wierzchołków v,w	$\deg(v) + \deg(w)$
1,6	
1,3	
1,4	
1,9	
2,7	
2,6	
2,5	
3,8	
3,7	
3,6	
3,9	
4,6	
4,7	
4,8	
5,8	
5,9	
7,9	
8,9	

b)

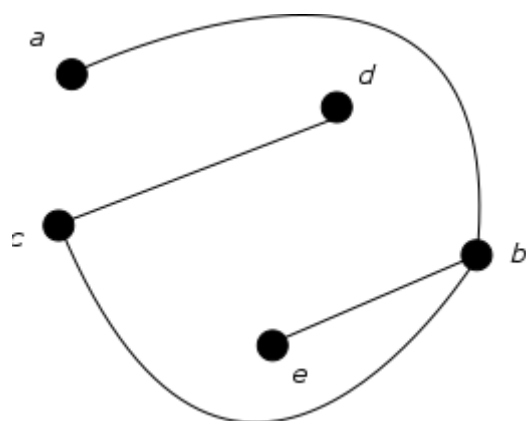


Para wierzchołków v,w	$\deg(v) + \deg(w)$
1,3	
1,5	
1,6	
1,7	
2,4	
2,5	
2,7	
3,5	
4,5	
4,6	
6,7	

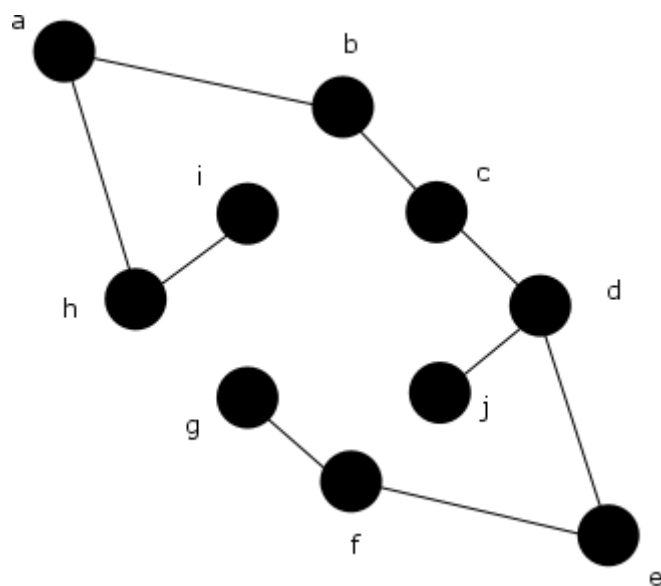
Zad. 7

Dorysuj krawędzie do poniższych grafów dwudzielnych w ten sposób, aby powstały grafy pełne dwudzielne.

a)



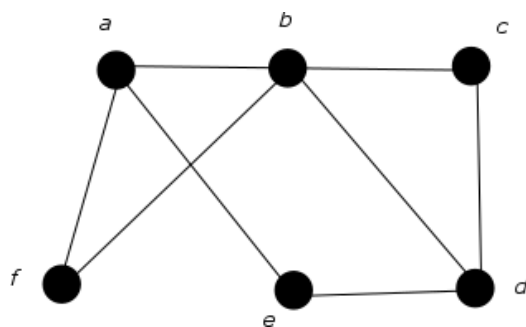
b)



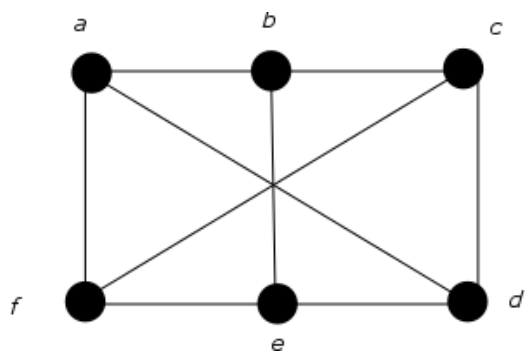
Zad. 8

Zmieniając krawędzie (dorysowując, lub usuwając krawędzie), stwórz z poniższych grafów grafy dwudzielne:

a)



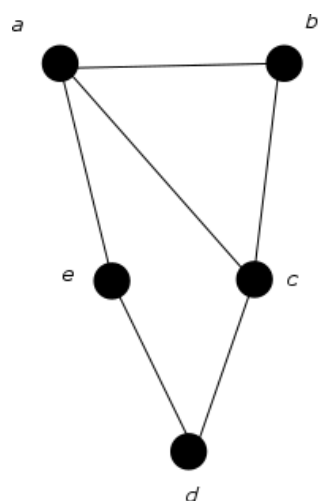
b)



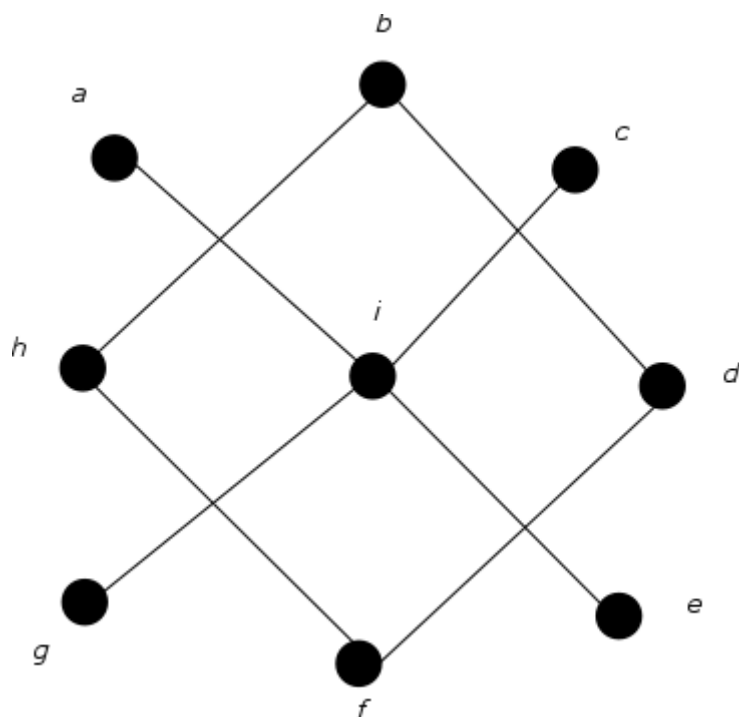
Zad. 9

Przekształć (dorysowując, lub usuwając krawędzie) graf tak, aby jego dopełnienie było grafem hamiltonowskim, narysuj to dopełnienie (może istnieć kilka możliwości).

a)



b)



Zad. 10

Ile cykli Hamiltona ma graf dwudzielny pełny $K_{3,3}$? (potraktuj cykle jako różne, jeśli mają one różne punkty początkowe lub ciągi wierzchołków).

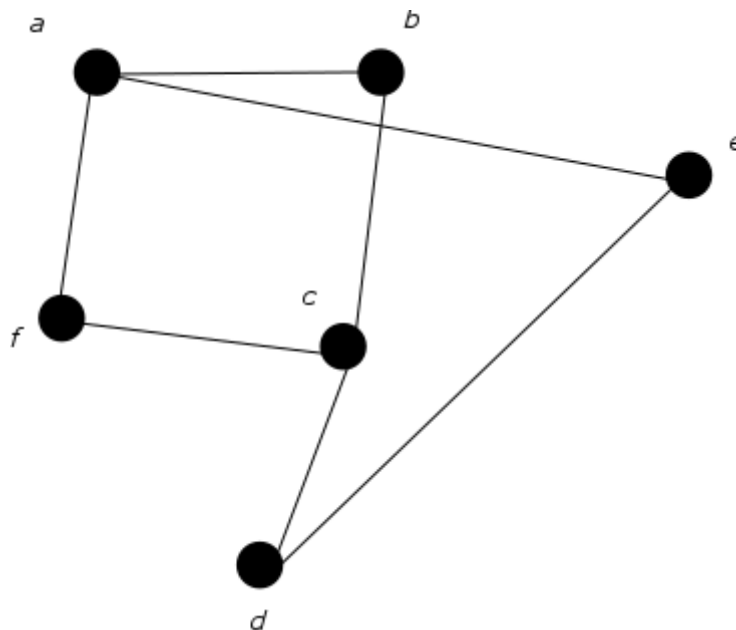
Zad. 11

Stwórz dowolny kod Graya długości $n=4$, następnie wskaż cykl Hamiltona mu odpowiadający, na grafie odpowiadającym kodom Graya o długości 4.

Zad. 12

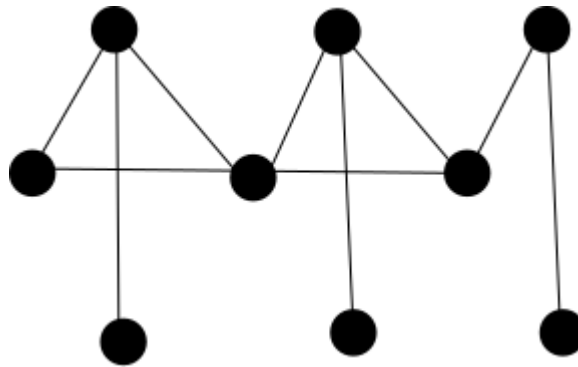
Sprawdź, czy podane grafy są regularne, jeżeli tak to określ maksymalny ich stopień, w innym przypadku dorysuj jak najmniejszą liczbę krawędzi krawędzie tak, by uzyskać graf regularny. Określ stopień zmienionych grafów.

a)



Stopień grafu regularnego: ...

b)



Zad. 13*

Pokaż, że grafy zbudowane na podstawie kodów Graya o długości n zawsze istnieją.

Zad. 14*

Udowodnij, że jeżeli, graf G nie jest spójny, to graf $\bar{G}$, będący dopełnieniem grafu G , jest spójny.

KONIEC