



KURS LOGIKA

LEKCJA 6

Zasada indukcji matematycznej

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Do czego służyć może zasada indukcji matematycznej?

- a) Do dowodzenia jakichkolwiek twierdzeń matematycznych.
- b) Do dowodzenia niektórych twierdzeń matematycznych.
- c) Do zakładania prawdziwości pewnych twierdzeń matematycznych.
- d) Do określenia zbioru liczb naturalnych.

Pytanie 2

Jak opisać można zastosowanie indukcji dla twierdzenia dotyczącego liczb naturalnych nie mniejszych niż n_0 ?

- a) Pokazujemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n_0 , a potem pokazujemy, że przy założeniu prawdziwości twierdzenia dla dowolnego $n \geq n_0$ wynika prawdziwość twierdzenia dla $n + 1$.
- b) Pokazujemy, że przy założeniu prawdziwości twierdzenia dla dowolnego $n \geq n_0$ wynika prawdziwość twierdzenia dla $n + 1$.
- c) Pokazujemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n_0 , a potem pokazujemy, że przy założeniu prawdziwości twierdzenia dla dowolnego $n \leq n_0$ wynika prawdziwość twierdzenia dla $n + 1$.
- d) Pokazujemy, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla n_0 , to jest prawdziwe dla $n_0 + 1$.

Pytanie 3

Oznaczmy twierdzenie, które mamy udowodnić indukcyjnie literką T . Jaką tezę udowadniamy w trzecim kroku indukcyjnym?

- a) Tezę twierdzenia T .
- b) Tezę, że twierdzenie T jest prawdziwe dla dowolnego $n + 1$.
- c) Tezę, że przy założeniu prawdziwości twierdzenia T dla dowolnego $n \geq n_0$ (gdzie n_0 bierzemy z pierwszego kroku) T jest prawdziwe dla $n + 1$.
- d) Tezę, że twierdzenie T jest prawdziwe dla dowolnego $n \geq n_0$ (gdzie n_0 bierzemy z pierwszego kroku).



Pytanie 4

$n^2 + 1 < 2^n, n \in \mathbb{N}$ - jak rozwiązać taką nierówność stosując zasadę indukcji?

- a) To niemożliwe.
- b) Sprawdzić nierówność dla kilku pierwszych n ($n = 1, 2, 3, \dots$) i znaleźć takie n_0 (w tym przypadku $n_0 = 5$), że dla $n \geq n_0$ nierówność już jest prawdziwa.
- c) Sprawdzić nierówność dla kilku pierwszych n ($n = 1, 2, 3, \dots$) i znaleźć takie n_0 (w tym przypadku $n_0 = 5$), że dla $n \geq n_0$ nierówność wydaje się być już prawdziwa. Dowieść to indukcyjnie.
- d) Przeprowadzić trzy kroki indukcyjne dla $n_0 = 1$.

Pytanie 5

Czy zasadą indukcji matematycznej można dowodzić twierdzeń dotyczących liczb całkowitych (niekoniecznie naturalnych)?

- a) Tak, byle ich zbiór posiadał element najmniejszy (n_0 do pierwszego kroku indukcyjnego).
- b) Nie.
- c) Tak, także tych zbiorów liczb całkowitych, które nie mają elementu najmniejszego, ani największego.

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Stosując metodę indukcji matematycznej, pokaż, że:

a) $1+3+\dots+(2n-1)=n^2, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$

c) $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}$

d) $1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\dots+n \cdot (n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\frac{1}{1 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 13}+\frac{1}{13 \cdot 19}+\dots+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{n}{6n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Zad. 2

Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

a) Liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 3.

b) Liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

c) $8 \mid 11^n - 3^n$

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

Zad. 3

Korzystając z zasady indukcji rozwiąż poniższe nierówności dla $n \in \mathbb{N}$:

a) $4^n > n^3$

b) $n^{n+1} > (n+1)^n$

c) $n! > 2^n$

d) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$



Zad. 4

Wykaż, że: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

KONIEC