



KURS LOGIKA

LEKCJA 8 Formuły rachunku predykatów

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Jak przeczytać można formułę: $\exists_{x \in U} p(x) \Rightarrow \exists_{x \in U} q(x)$?

- a) Istnieje taki element $x \in U$, że z prawdziwości zdania $p(x)$ wynika prawdziwość zdania $q(x)$.
- b) Jeżeli istnieje taki element $x \in U$, że zdanie $p(x)$ jest prawdziwe, to prawdziwe jest zdanie $q(x)$.
- c) Jeśli istnieje taki element zbioru U , dla którego zdanie $p(x)$ jest prawdziwe, to istnieje taki (być może inny) element zbioru U , dla którego zdanie $q(x)$ jest prawdziwe.
- d) Jeśli istnieje taki element zbioru U , dla którego zdanie $p(x)$ jest prawdziwe, to dla tego samego elementu zdanie $q(x)$ jest prawdziwe.

Pytanie 2

W wyrażeniu „ $\forall_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{x}{x+1} = 0 \right) \Rightarrow y + x = 1$ ” zmienna y :

- a) Jest liczbą rzeczywistą
- b) Jest stałą
- c) Jest zmienną wolną
- d) Jest dowolną liczbą

Pytanie 3

Predykat $p(x, y)$ można określić jako:

- a) Kwantyfikator dwuargumentowy
- b) „Relację” elementów x i y
- c) Zmienną wolną
- d) Związanie zmiennych x i y

Pytanie 4

Tautologią nazywamy zdanie złożone, które jest prawdziwe dla:

- a) pewnych dziedzin i pewnych wartości swoich zmiennych logicznych
- b) wszystkich dziedzin i pewnych wartości swoich zmiennych logicznych
- c) pewnych dziedzin i wszystkich wartości swoich zmiennych logicznych
- d) wszystkich dziedzin i wszystkich wartości swoich zmiennych logicznych

Pytanie 5

Formuła „ $\sim \exists_x p(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim p(x)$ ” jest przykładem prawa:

- a) De Moivre’a
- b) De Morgana
- c) De Mono
- d) De Mobile’a

Pytanie 6

Tautologią jest formuła:

- a) $\forall_x p(x) \Rightarrow \exists_x p(x)$
- b) $\exists_x p(x) \Rightarrow \forall_x p(x)$
- c) $\forall_x p(x) \Rightarrow \exists_x [\sim p(x)]$
- d) $\exists_x p(x) \Rightarrow \forall_x [\sim p(x)]$

Pytanie 7

Formułę „ $\exists_x \left(p(x) \Rightarrow \exists_y q(x, y) \right)$ ” można wyrazić w języku naturalnym następująco:

- a) Istnieje taki element x , który posiada własność p i jest w relacji q z pewnym elementem y .
- b) Istnieje taki element x , który, jeśli posiada własność p , to jest w relacji q z pewnym elementem y .
- c) Jeżeli istnieje taki element x , który posiada własność p , to jest w on relacji q z pewnym elementem y .
- d) Istnieją takie elementy x i y , że jeżeli x posiada własność p , to x i y są w relacji q .

Pytanie 8

Przyjmując, że X jest zbiorem wszystkich ludzi, $p(x)$ predykatem „ x jest dowcipny”, a $q(x)$ jest predykatem „ x żartuje z nazwisk”, jak zapisać można zdanie „Dowcipny człowiek nie żartuje z nazwisk” w postaci formuły rachunku predykatów?

- a) $\forall_{x \in X} (p(x) \wedge \sim q(x))$
- b) $\exists_{x \in X} (p(x) \wedge \sim q(x))$
- c) $\exists_{x \in X} (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$
- d) $\forall_{x \in X} (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$

Pytanie 9

Weźmy pod uwagę zdanie „Każde drzewo jest iglaste lub nie jest palmą”. Jak napisać zaprzeczenie tego zdania?

- a) Nie każde drzewo jest iglastą palmą.
- b) Istnieje drzewo, które nie jest iglaste lub nie jest palmą.
- c) Istnieje iglasta palma.
- d) Istnieje drzewo, które nie jest iglaste i jest palmą.

Pytanie 10

Prawdziwe jest zdanie:

- a) $\exists_{n \in \mathbb{N}} n^2 + 4 < 0$
- b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} n^2 + 4 < 0$
- c) $\exists_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 4 < 0 \Rightarrow n > 0)$
- d) $\exists_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 4 > 0 \Rightarrow n < 0)$

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Niech $p(n, m)$ będzie predykatem „ $n^2 + 1 > m$ ” w dziedzinie będącej zbiorem liczb naturalnych. Podaj wartość logiczną każdego z następujących zdań:

- a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [p(n, m) \Rightarrow p(m, n)]$
- b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} p(n, m) \Rightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} \forall_{l \in \mathbb{N}} (p(k, l) \wedge p(l, k) \Rightarrow k = l)$
- c) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [p(n, m) \Rightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} (p(k, n) \wedge p(k, m))]$

Zad. 2

Niech $p(x, y)$ będzie predykatem „ $x \cdot y \in \mathbb{Q}$ ” w dziedzinie będącej zbiorem liczb rzeczywistych. Podaj wartość logiczną każdego z następujących zdań:

- a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} (p(x, y) \vee p(x, x) \vee p(y, y))$
- b) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} [\sim p(x, y) \vee \forall_{z \in \mathbb{R}} (p(x, z) \vee p(y, z))]$
- c) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} [x \neq y \Rightarrow (p(x, y) \wedge \sim p(x, z))]$

Zad. 3

Zamień zdanie podane w języku naturalnym na wyrażenie rachunku predykatów.

- a) Z każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych jedna jest mniejsza od drugiej.
- b) Jeśli istnieje najmniejsza liczba rzeczywista, to nie istnieje liczba rzeczywista największa.
- c) Jeżeli jakaś liczba jest mniejsza od pewnej liczby, to ta druga nie jest mniejsza od pierwszej.
- d) Liczby 11 i 12 są względnie pierwsze (nie mają wspólnego dzielnika).
- e) Ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca stały.
- f) Dla dowolnych $a \neq 0$ i b (rzeczywistych) funkcja $y = ax + b$ ma miejsce zerowe.

- g) Dla każdych dwóch liczb naturalnych istnieje ich wspólna wielokrotność.
- h) Pomiedzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.
- i) Adam lubi wszystkich, którzy lubią Beatę.
- j) Każdy śledź jest rybą, ale nie każda ryba jest śledziem.
- k) Jeśli każdy przodek przodka dowolnej osoby jest też przodkiem tej osoby, ale nikt nie jest swoim własnym przodkiem, to jest ktoś taki, kto nie ma przodków.

Zad. 4

Do formuły „ $\left(\forall_{x \in U} p(x) \Rightarrow \exists_{x \in U} q(x) \right) \Rightarrow \forall_{x \in U} (p(x) \Rightarrow q(x))$ ” dobierz takie dziedziny i predykaty, aby formuła ta była:

- a) prawdziwa
- b) fałszywa

Zad. 5

Do formuły „ $\exists_{x \in U} \left[p(x, x) \wedge \forall_{y \in U} p(x, y) \right] \Leftrightarrow \forall_{x \in U} \exists_{y \in U} [p(y, y) \wedge \sim p(y, x)]$ ” dobierz takie dziedziny i predykaty, aby formuła ta była:

- a) prawdziwa
- b) fałszywa

Zad. 6

Wykaż, że podana formuła jest tautologią.

- a) $\forall_{x \in U} (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \left(\forall_{x \in U} p(x) \wedge \forall_{x \in U} q(x) \right)$
- b) $\left(\forall_{x \in U} p(x) \wedge \exists_{x \in U} q(x) \right) \Rightarrow \exists_{x \in U} (p(x) \wedge q(x))$
- c) $\left(\exists_{x \in U} p(x) \vee \forall_{x \in U} q(x) \right) \Leftrightarrow \exists_{x \in U} \forall_{y \in U} (p(x) \vee q(y))$
- d) $\left(\forall_{x \in U} p(x) \Rightarrow \exists_{y \in U} q(y) \right) \Rightarrow \exists_{x \in U} (p(x) \Rightarrow q(x))$
- e) $\forall_{x \in U} \left[\forall_{y \in U} p(x, y) \Rightarrow q(x) \right] \Leftrightarrow \forall_{x \in U} \exists_{y \in U} (p(x, y) \Rightarrow q(x))$

Zad. 7

Sprawdź, czy podana formuła jest tautologią.

- a) $\forall_{x \in U} \exists_{y \in U} p(x, y) \Rightarrow \exists_{x \in U} p(x, x)$
- b) $\forall_{x \in U} (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists_{x \in U} p(x) \Rightarrow \exists_{x \in U} q(x))$
- c) $\exists_{x \in U} (p(x) \Rightarrow \forall_{y \in U} q(y)) \Rightarrow \exists_{x \in U} \forall_{y \in U} (p(x) \Rightarrow q(y))$
- d) $(\forall_{x \in U} p(x) \Rightarrow \forall_{x \in U} q(x)) \Rightarrow \forall_{x \in U} (p(x) \Rightarrow q(x))$
- e) $\forall_{x \in U} \forall_{y \in U} (p(x, y) \Rightarrow p(y, x)) \Rightarrow \exists_{x \in U} p(x, x)$

Zad. 8

Niech U oznacza zbiór studentów, a $p(x)$ będzie predykatem „ x rozumie logikę”. Zapisz w języku naturalnym następujące prawa rachunku kwantyfikatorów:

- a) $\forall_{x \in U} p(x) \Rightarrow \sim \exists_{x \in U} [\sim p(x)]$
- b) $\sim \exists_{x \in U} p(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in U} [\sim p(x)]$
- c) $\forall_{x \in U} p(x) \Rightarrow \exists_{x \in U} p(x)$

Zad. 9

Niech M oznacza zbiór matematyków, a T - zbiór twierdzeń. Niech $p(x, y)$ będzie predykatem „ x zna y ”. Zapisz w języku naturalnym następujące prawa rachunku kwantyfikatorów:

- a) $\forall_{x \in M} \forall_{y \in T} p(x, y) \Leftrightarrow \forall_{y \in T} \forall_{x \in M} p(x, y)$
- b) $\exists_{x \in M} \exists_{y \in T} p(x, y) \Leftrightarrow \exists_{y \in T} \exists_{x \in M} p(x, y)$
- c) $\exists_{x \in M} \forall_{y \in T} p(x, y) \Rightarrow \forall_{y \in T} \exists_{x \in M} p(x, y)$

Zad. 10

Napisz zaprzeczenia poniższych wyrażeń nie używając spójnika „ $\sim$ ”.

a) $\forall_x \exists_y (p(x, y) \vee \exists_z q(x, z))$

b) $\forall_x \forall_y (p(x) \Rightarrow q(y)) \vee \exists_x (p(x) \wedge q(x))$

c) $\exists_x \exists_y \forall_z [x > y \Rightarrow (x + y > 0 \vee x + z = 0)]$

d) $\exists_x [(x > 0 \wedge x < 4) \vee \forall_y (y > 0 \wedge y < 4)]$

e) $\forall_x [x < 5 \Rightarrow \exists_y (y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q})]$

KONIEC