

Graf nieskierowany

Grafem nieskierowanym G nazywamy dwa zbiory:

1. Niepusty zbiór wierzchołków grafu $V(G)$
2. Zbiór krawędzi grafu $E(G)$, będący podzbiorem dwuelementowych zbiorów wierzchołków z V , czyli:

$$E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$$

Graf skierowany

Grafem skierowanym G nazywamy dwa zbiory:

1. Niepusty zbiór wierzchołków grafu $V(G)$
2. Zbiór krawędzi grafu $E(G)$, będący podzbiorem par uporządkowanych iloczynu kartezjańskiego $V \times V$, czyli relację:

$$E \subseteq V \times V$$

Droga

Drogą w grafie nazywać będziemy ciąg krawędzi taki, że koniec jednej stanowi początek następnej.

Cykl

Cyklem nazywamy:

- Drogę $x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_1$, gdzie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to wierzchołki
- O długości co najmniej 1
- Zamkniętą
- Taką, że wszystkie wierzchołki $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ są różne

Droga acykliczna

Drogą acykliczną nazywamy drogę nie posiadającą cyklu.



Macierz sąsiedztwa

Macierzą sąsiedztwa grafu (skierowanego lub nie) nazywamy macierz M , w której przedstawiamy liczbę krawędzi łączących poszczególne wierzchołki.

Macierz incydencji

Macierzą incydencji grafu (skierowanego lub nie) nazywamy macierz A , mającą liczbę wierszy równą liczbie wierzchołków i liczbę kolumn równą liczbie krawędzi. Jej wyraz a_{ij} równa się:

- -1 , jeśli wierzchołek jest końcem krawędzi (tylko w grafie skierowanym)
- 0 , jeśli wierzchołek nie styka się z krawędzią
- 1 , jeśli wierzchołek jest początkiem krawędzi (w grafie skierowanym), lub styka się z krawędzią (w grafie nieskierowanym)
- 2 , jeśli wierzchołek jest początkiem i końcem krawędzi (tylko w grafie skierowanym)



Grafy acykliczne

Graf acykliczny to graf nie posiadający cyklu.

Grafy izomorficzne

Grafy G i H są izomorficzne, gdy istnieją takie wzajemnie jednoznacznie funkcje $v: V(G) \rightarrow V(H)$ i $e: E(G) \rightarrow E(H)$, przyporządkowujące sobie ich wierzchołki i krawędzie tak, że odpowiadające sobie krawędzie łączą odpowiadające sobie wierzchołki.

Oznacza to, że krawędź a łączy ze sobą dwa wierzchołki x i y w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej krawędź $e(a)$ łączy wierzchołki $v(x)$ i $v(y)$ w grafie H .

Ozn: $G \simeq H$

Graf prosty

Graf prosty to grafy bez krawędzi wielokrotnych i bez pętli.

Graf regularny

Graf regularny to graf, w którym wszystkie wierzchołki są tego samego stopnia.

Graf pusty

Graf pusty to graf, w którym w ogóle nie ma krawędzi (są same wierzchołki izolowane).

Graf pełny

Graf pełny to graf prosty, w którym każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z każdym.

Ozn: K_n

Graf samodopełniający

Graf samodopełniający to graf izomorficzny ze swoim dopełnieniem.



Graf dwudzielny

Graf dwudzielny to graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory A i B , takie, że każda krawędź tego grafu łączy wierzchołek ze zbioru A z wierzchołkiem ze zbioru B .

Graf dwudzielny pełny

Graf dwudzielny pełny to graf dwudzielny, z oznaczeniami jak wyżej, ale taki, że każdy wierzchołek ze zbioru A jest połączony z każdym wierzchołkiem ze zbioru B .

Kostka Q_k

Graf, którego wierzchołki odpowiadają k -elementowym ciągom zero-jedynkowym, przy czym dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeżeli odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie na jednym miejscu, nazywamy k -kostką i oznaczamy jako Q_k .

Kod Grey'a

Kod Graya długości n – ciąg zawierający wszystkie kombinacje n cyfr 0 i 1, ustawione w takiej kolejności, że dwie kolejne kombinacje w ciągu różnią się dokładnie jedną cyfrą i ostatnia różni się jedną cyfrą od pierwszej.



PODSTAWOWE OPERACJE NA GRAFACH

Suma grafów

Sumą grafów $G_1 = \{V(G_1), E(G_1)\}$, $G_2 = \{V(G_2), E(G_2)\}$ nazywamy graf $G_1 \cup G_2 = \{V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2)\}$.

Podgraf

Podgrafem grafu $G = \{V(G), E(G)\}$ nazywamy graf $G' = \{V(G'), E(G')\}$, taki, że:
 $V(G') \subseteq V(G), E(G') \subseteq E(G)$.

Różnica grafów

Przez $G - G'$ rozumiemy graf powstały przez usunięcie z grafu G wierzchołków należących do G' i krawędzi do nich incydentnych.

Przez $G \setminus e$ rozumiemy graf powstały przez usunięcie z grafu G krawędzi e i „złączenie” ze sobą wierzchołków z nią incydentnych.

Dopełnienie grafu

Dopełnieniem $\bar{G}$ grafu prostego G , o zbiorze wierzchołków $V(G)$, nazywamy graf o takim samym zbiorze wierzchołków i taki, w którym wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy nie łączy je w grafie G .

Droga Eulera

Drogą Eulera nazywamy drogę, zawierającą wszystkie krawędzie i taką, która nie zawiera dwóch takich samych krawędzi.

Cykl Eulera

Drogą Eulera nazywamy drogę zamkniętą, zawierającą wszystkie krawędzie i taką, która nie zawiera dwóch takich samych krawędzi.

TWIERDZENIE Eulera (o istnieniu cyklu Eulera)

Graf spójny, mający wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, ma cykl Eulera.

TWIERDZENIE o istnieniu drogi Eulera

Graf spójny, mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

ALGORYTM Fleury'ego

Niech:

ES - pewien ciąg krawędzi cyklu lub drogi

VS - pewien ciąg wierzchołków cyklu lub drogi

- KROK 1: Jeśli istnieje w grafie wierzchołek v stopnia nieparzystego, to wybierz go, w przeciwnym razie wybierz dowolny wierzchołek stopnia parzystego. Na samym początku $VS = v$, oraz $ES = \lambda$ (ciąg pusty).
- KROK 2: Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi już żadna krawędź, to zatrzymaj się.
- KROK 3: Jeśli w grafie pozostała dokładnie jedna krawędź prowadząca z wierzchołka v do pewnego wierzchołka w (niech tą krawędzią będzie e), to usuń krawędź e oraz wierzchołek v , a następnie przejdź do KROK 5



- KROK 4: Jeśli w grafie pozostały więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v , wybierz taką krawędź e , po której usunięciu graf pozostanie spójny, a następnie usuń krawędź e
- KROK 5: zastąp v wierzchołkiem w , dołącz w na końcu ciągu VS , oraz e na końcu ciągu ES . Przejdź do KROK 2.



DROGA I CYKL HAMILTONA

Droga Hamiltona

Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Cykl Hamiltona

Cyklem Hamiltona nazywamy drogę zamkniętą, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY 1 na to, aby graf był grafem hamiltonowskim

Jeżeli graf G nie ma pętli, ani krawędzi wielokrotnych, ma co najmniej 3 wierzchołki, z których każdy ma stopień równy co najmniej połowie ilości wierzchołków, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY 2 na to, aby graf był grafem hamiltonowskim

Jeżeli graf mający n wierzchołków i nie mający pętli, ani krawędzi wielokrotnych, ma co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędzi, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY 3 na to, aby graf był grafem hamiltonowskim

Jeżeli graf mający n wierzchołków i nie mający pętli, ani krawędzi wielokrotnych, ma co najmniej 3 wierzchołki, oraz dla każdej pary wierzchołków (v, w) niepołączonych krawędzią zachodzi nierówność: $\deg(v) + \deg(w) \geq n$, to graf G jest hamiltonowski.



WARUNEK KONIECZNY na to, aby graf był grafem hamiltonowskim dla grafów dwudzielnych

Niech G będzie grafem dwudzielnym, z podziałem wierzchołków na zbiory rozłączone $V(G) = V_1 \cup V_2$. Wówczas:

- Jeśli graf G ma cykl Hamiltona, to: $|V_1| = |V_2|$
- Jeśli graf G ma drogę Hamiltona, to ilości elementów w zbiorach V_1, V_2 różnią się co najwyżej o 1
- Jeżeli graf nie ma ani cyklu, ani drogi Hamiltona, to ilość elementów w zbiorach różni się co najmniej o 2

Jeśli graf G jest grafem pełnym dwudzielnym o co najmniej trzech wierzchołkach, zachodzą także twierdzenia odwrotne.



GRAFY SKIEROWANE

Źródło

Wierzchołek grafu skierowanego, nie będący końcem żadnej krawędzi.

Ujście

Wierzchołek grafu skierowanego, nie będący początkiem żadnej krawędzi.

TWIERDZENIE o istnieniu źródła i ujścia

Każdy skończony acykliczny graf skierowany ma co najmniej jedno ujście i co najmniej jedno źródło.

ALGORYTM na znajdowanie ujścia

Niech dany będzie skończony, acykliczny, skierowany graf G .

- KROK 1: Wybierz dowolny wierzchołek v w zbiorze $V(G)$.
- KROK 2: Oznacz ujście jako wierzchołek v .
- KROK 3: Póki istnieje następnik wierzchołka v , wybierz wierzchołek u ze zbioru następników wierzchołka v , oznacz go jako v i przejdź do KROK 2

Etykietowanie uporządkowane

Etykietowaniem uporządkowanym nazywamy ponumerowanie n wierzchołków grafu cyklicznego skierowanego liczbami od 1 do n , w taki sposób, że zawsze jeżeli istnieje droga od wierzchołka z numerem i do wierzchołka z numerem j , to na pewno $i > j$.

Każdy acykliczny graf skierowany ma etykietowanie uporządkowane.

ALGORYTM na znajdowanie etykietowania uporządkowanego

Na wejściu powinniśmy mieć skończony, acykliczny graf skierowany G mający n wierzchołków, ze zbiorem wierzchołków V i zbiorem krawędzi E .



KROK 1: Dopóki V nie jest zbiorem pustym, utwórz nowy podgraf H , składający się z aktualnego zbioru wierzchołków V i zbioru krawędzi E .

KROK 2: Znajdź dowolne ujście w grafie H (np. przy pomocy algorytmu opisanego wyżej) i nadaj mu etykietę $n - |V| + 1$.

KROK 3: Usuń wierzchołek z KROKU 2 ze zbioru V , usuń także krawędzie wchodzące do niego ze zbioru E .

STOPIEŃ WIERZCHOŁKA w grafie skierowanym

Stopniem „wejściowym” wierzchołka $\text{indeg}(v)$ nazywamy liczbę krawędzi „wchodzących” do niego, czyli liczbę krawędzi, których ten wierzchołek jest końcem.

Stopniem „wyjściowym” wierzchołka $\text{outdeg}(v)$ nazywamy liczbę krawędzi „wychodzących” z niego, czyli liczbę krawędzi, których ten wierzchołek jest początkiem.

Stopniem wierzchołka $\text{deg}(v)$ w grafie skierowanym nazywamy sumę krawędzi „wchodzących” i „wychodzących” z niego:

$$\text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v) = \text{deg}(v)$$

Pętla zwiększa stopień o 2 – jako krawędź jednocześnie „wchodząca” i „wychodząca”.

ISTNIENIE CYKLU EULERA dla grafów skierowanych

Dla grafu skierowanego „spójnego” (czyli takiego, który byłby spójny, gdyby potraktować go jako nieskierowany):

Graf ten posiada cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopnie wejściowy i wyjściowy każdego wierzchołka są równe:

$$\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$$



ISTNIENIE DROGI EULERA dla grafów skierowanych

Dla grafu skierowanego „spójnego” (czyli takiego, który byłby spójny, gdyby potraktować go jako nieskierowany):

Graf ten posiada drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopnie wejściowy i wyjściowy każdego wierzchołka, z wyjątkiem dwóch są równe:

$$\text{in deg}(v) = \text{out deg}(v)$$

Co do tych dwóch wierzchołków, których stopnie wejściowy i wyjściowy nie są równe, w jednym z nich, stopień wejściowy musi być większy od drugiego o 1, a stopień wyjściowy mniejszy o 1.

ODWRÓCENIE grafu

Odwróceniem grafu skierowanego G nazywamy graf skierowany $\hat{G}$, otrzymany przez odwrócenie kierunków wszystkich krawędzi grafu G .