



KURS MATURA ROZSZERZONA część 1

LEKCJA 2 Wyrażenia algebraiczne

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Wyrażenie $\frac{a^3 - 8}{a^2 + 2a + 4}$ jest równe:

- a) $a + 2$
- b) $a - 2$
- c) $a^2 + 4$
- d) $a^2 - 4$

Pytanie 2

Suma współczynników wielomianu $W(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1)(x^8-1)(x^{16}-1)$ jest równa:

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) 1

Pytanie 3

Jeśli $x - \frac{1}{x} = 2$, to $x^3 - \frac{1}{x^3}$ jest równe:

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 14



Pytanie 4

O pewnych liczbach rzeczywistych x i y wiadomo, że $\frac{2x+3y}{4y-x} = 1$ oraz że $x \neq 4y$. Wartość wyrażenia $\frac{2x+y}{2x-y}$ jest równa:

- a) 0
- b) -5
- c) 5
- d) 3

Pytanie 5

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 5$ przez dwumian $x + 2$ wynosi:

- a) 0
- b) 5
- c) 10
- d) 15

Pytanie 6

Wielomian $W(x) = x^{2020} + x^{1010} + 1$:

- a) nie ma pierwiastków rzeczywistych
- b) ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty
- c) ma dokładnie 2020 pierwiastków rzeczywistych
- d) ma dokładnie 1010 pierwiastków rzeczywistych

Pytanie 7

Liczby naturalne m i n spełniają warunek $m^2 + mn - 11 = 0$. Iloczyn mn jest równy:

- a) 0
- b) -110
- c) 10
- d) 11



Pytanie 8

Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^3 + 5x^2 + 10x - 4$ przez dwumian $Q(x) = 3x - 1$ jest wielomian:

- a) $x^2 + 2x + 4$
- b) $x^2 + x + 3$
- c) $3x^2 + 6x + 12$
- d) $3x^2 + 2x + 4$

Pytanie 9

Działanie $*$ zdefiniowane jest następująco: $a * b = 2a + 3b$. Wartość wyrażenia $(2 * 3) * 4$ wynosi:

- a) 24
- b) 28
- c) 36
- d) 38

Pytanie 10

Dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{b}{2a}\}$ prawdziwe jest równanie $\frac{ax+1}{2x+1} = \frac{4x+3}{2ax+b}$. Wtedy $a \cdot b$ ma wartość:

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10

Pytanie 11

Wyrażenie $x^2 - 2xy + y^2 - x^2y^2$ jest równe iloczynowi:

- a) $(x - y + xy)(x + y - xy)$
- b) $(x + xy - y)(x + xy + y)$
- c) $(x + y + xy)(x - y - xy)$
- d) $(x - xy - y)(x + xy - y)$

Pytanie 12

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

- a) $|x - y| \leq |x| - |y|$
- b) $|x + y| \leq |x| - |y|$
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- d) $|x + y| \geq |x| + |y|$

Pytanie 13

Działanie $\llbracket x \rrbracket$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ zdefiniowane jest następująco: $\llbracket x \rrbracket = \frac{1}{x+1} + 1$. Rozwiązaniem równania $\llbracket x \rrbracket = 3$ jest liczba:

- a) $x = -\frac{1}{2}$
- b) $x = \frac{1}{2}$
- c) $x = -\frac{3}{2}$
- d) $x = \frac{3}{2}$

Pytanie 14

Istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a i b , dla których prawdziwa jest równość:

- a) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$
- b) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$
- c) $a^2 - b^2 = a^2 + b^2$
- d) $(a + b)^2 = (a - b)^2$

Pytanie 15

Równanie $\frac{13x^2 - 3x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ jest prawdziwe dla każdej liczby $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Wyznacz wartości liczb A , B i C . Zakoduj wynik podając otrzymane liczby w kolejności A, B, C .



Pytanie 16

Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 = 2x + 4$. Wyznacz liczby a i b takie, aby dla każdej liczby rzeczywistej x zachodziła równość $x^2(x^2 - 2) = ax + b$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności iloczynu $a \cdot b$.

Pytanie 17

Wyznacz iloczyn wszystkich liczb całkowitych, dla których wartość wyrażenia

$\frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4}{x - 3}$ jest liczbą całkowitą. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności wartości bezwzględnej otrzymanego wyniku.

Pytanie 18

Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 72$ przy dzieleniu przez dwumian $(x - 1)$ daje resztę 48. Wyznacz wartość sumy $a + b + c$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności wartości bezwzględnej otrzymanego wyniku.

Pytanie 19

Wyznacz iloczyn pierwiastków wielomianu $W(x) = (x^2 - 9x + 14)^2 - 36$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Pytanie 20

Dana jest liczba $\frac{444443^2 + 888887}{222223^2 - 444445}$. Przekształć tę liczbę do najprostszej postaci. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.



Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = -2x^3 - x^2 + 25x - 12$ i rozłóż go na czynniki.

Zad. 2

O liczbach rzeczywistych a i b wiadomo, że $a^3 + b^3 = 407$ oraz $a^2 - ab + b^2 = 37$. Oblicz wartość sumy liczb a i b .

Zad. 3

Wiedząc, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $\frac{3n+2}{n}$ jest liczbą pierwszą, oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{n^4 + 3n^2 + 4}{n^4}.$$

Zad. 4

Liczby a i b takie, że $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $a \neq b$ spełniają warunek $a^2 + 5ab^2 = b^2 + 5a^2b$. Wyznacz wartość sumy odwrotności liczb a i b .

Zad. 5

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x-3)$ daje resztę (-6) , a przy dzieleniu przez $(x+2)$ daje resztę 4 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x^2 - x - 6)$.

**Zad. 6**

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x-1)$ daje resztę 4, przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę (-2) , a przy dzieleniu przez $(x-2)$ daje resztę 13. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

Zad. 7

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx + 4$. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-3)$ jest równa 28. Wyznacz wartości współczynników a i b tego wielomianu.

Zad. 8

Wyznacz wartość wyrażenia $a^4 - a^3 - 11a^2 + 10a + 3$ wiedząc, że zachodzi równość $a^2 - 4a + 2 = 0$.

Zad. 9

Dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych a i b , takich że $a \cdot b < 0$ oraz $b > 0$, spełniony jest warunek $a + 2b = 15 \frac{b^2}{a}$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{4b^2 - 4ab}{\frac{1}{5}a^2 + b^2}$.

Zad. 10

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^4 + 4y^4 + 20 \geq 16xy$.

Zad. 11

Wykaż, że jeśli dla pewnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a \cdot b \geq 8$, to prawdziwa jest również nierówność $a^2 + b^2 \geq 16$.

**Zad. 12**

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^4 + 64$ jest liczbą złożoną.

Zad. 13

Rozłóż na czynniki wielomian $n^4 + 5n^2 + 9$.

Zad. 14

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}.$$

Zad. 15

Doprowadź wyrażenie $\frac{3x}{x^2 - 8x + 16} - \frac{3}{x - 4} - \frac{4}{x^2 - 4x}$ do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = -2$. Podaj odpowiednie założenia.

Zad. 16

Wykaż, że dla dowolnych rzeczywistych liczb a i b prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 \geq ab - 3a + b - 5.$$

Zad. 17

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - x^3 + x + 35$ jako iloczyn dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych wiedząc, że suma wyrazów wolnych tych wielomianów jest równa 12.



Zad. 18

Wykaż, że dla dowolnych niezerowych liczb a i b wartość wyrażenia $\frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{a}$ jest dodatnia.

Zad. 19

O wielomianie $W(x)$ wiadomo, że $W(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10$. Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.

Zad. 20

Wykaż, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych parzystych powiększony o 16 jest kwadratem liczby naturalnej podzielnej przez 4.

KONIEC