



KURS MATURA ROZSZERZONA część 2

LEKCJA 6 Rachunek różniczkowy

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ jest funkcją:

- a) stale rosnącą
- b) stale malejącą
- c) mającą jedno ekstremum lokalne
- d) mającą dwa ekstrema lokalne

Pytanie 2

Równanie $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

- a) ma zawsze cztery rozwiązania
- b) nie może mieć dokładnie jednego rozwiązania
- c) ma zawsze co najmniej jedno rozwiązanie
- d) może nie mieć rozwiązań

Pytanie 3

Wskaż funkcję, której pochodną jest funkcja $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$:

- a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 4$
- b) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + x + 1$
- c) $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$
- d) $f(x) = 3x^2 + 6x - 4$

Pytanie 4

Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 3 \\ m, & x = 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ jest ciągła dla:

- a) $m = 0$
- b) $m = 3$
- c) $m = 6$
- d) $m = -6$

Pytanie 5

Wartość granicy $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$ wynosi:

- a) 0
- b) 4
- c) 7
- d) $+\infty$

Pytanie 6

Wskaż równość prawdziwą:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{2-x} = +\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$

Pytanie 7

Wskaż granicę, której wartość jest równa 2:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{x-1}{x+1} \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 2^x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + 2}$

Pytanie 8

Granica nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)! + (n+1)!}$ jest równa:

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 0

d) 1

Pytanie 9

Asymptotą wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 - 7}{x^2 - 4}$ **nie jest** prosta o równaniu:

a) $x = 2$

b) $x = -2$

c) $y = 2$

d) $y = -2$



Pytanie 10

Dana jest funkcja $f(x) = 2\sqrt[3]{x^4}$. Wartość pochodnej funkcji f w punkcie $x_0 = 27$ wynosi:

- a) 8
- b) 24
- c) 9
- d) $\frac{8}{3}$

Pytanie 11

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x + |x|}{x}$. Wskaż informację fałszywą:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
- c) Granica funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ nie istnieje.
- d) Funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodną.

Pytanie 12

Funkcja $f(x) = x^5 - 15x^3 + 195$ jest określona na przedziale $x \in \langle 1, 4 \rangle$. Zbiorem wartości funkcji f jest więc przedział:

- a) $\langle 181, 259 \rangle$
- b) $\langle 33, 259 \rangle$
- c) $\langle 33, 181 \rangle$
- d) $\langle 33, 357 \rangle$

Pytanie 13

Funkcja $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 4mx^2 + 5x - 1$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych dla:

- a) $m \in \mathbb{R}$
- b) $m \in (-\sqrt{15}, \sqrt{15})$
- c) $m \in \langle -\sqrt{15}, \sqrt{15} \rangle$
- d) $m \in (-\infty, -\sqrt{15}) \cup (\sqrt{15}, +\infty)$

Pytanie 14

Funkcja $f(x) = \frac{|x|}{x}$:

- a) ma asymptotę pionową $x = 0$
- b) jest ciągła
- c) ma pochodną w punkcie $x_0 = 0$
- d) ma dwuelementowy zbiór wartości

Pytanie 15

Wyznacz wartość granicy $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x^2 - 16}$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku przybliżenia do części tysięcznych otrzymanego wyniku.

Pytanie 16

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{(2mx^3 + 1)^2}{(x^2 + 1)^3}$, gdzie $m > 0$. Wyznacz wartość parametru m , dla

którego asymptotą poziomą funkcji f jest prosta o równaniu $y = 12$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



Pytanie 17

Wyznacz wartość parametru a , dla którego styczna do wykresu funkcji $f(x) = -x^4 + ax^2 - 8$ w punkcie $x_0 = 2$ jest prostopadła do prostej o równaniu $x - 4y + 8 = 0$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności trzeciej potęgi otrzymanego wyniku.

Pytanie 18

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$. Oblicz $f'(3)$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Pytanie 19

Wyznacz wartość parametru m , dla którego funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 16}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \frac{m + 42}{5}, & x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Pytanie 20

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{-12}{x+1}$. Styczna do funkcji f w punkcie $A = (x_A, y_A)$, gdzie $x_A < 0$, jest równoległa do prostej o równaniu $y = 3x$. Wyznacz wartość y_A . Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności trzeciej potęgi otrzymanego wyniku.



Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i asymptoty funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x}$.
Naszkicuj wykres funkcji f .

Zad. 2

Wykaż, że równanie $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zad. 3

Wykaż, że równanie $x^3 + 2x^2 - 4x + 4 = 0$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb dodatnich.

Zad. 4

Wykaż, że równanie $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Zad. 5

Wyznacz liczbę ekstremów funkcji $f(x) = 3x^3 - mx^2 + 4x + m$ w zależności od parametru m .

Zad. 6

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$. Zbadaj, czy funkcja f jest ciągła w punkcie

$x_0 = 0$ oraz czy ma w tym punkcie pochodną.

**Zad. 7**

Wyznacz wartość parametru m , dla którego suma sześciątów dwóch różnych miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 + (m+2)x + m^2$ jest najmniejsza.

Zad. 8

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 + 2mx - 1$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zad. 9

Dany jest układ równań $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = m^2 \end{cases}$ z parametrem m . Wyznacz pary liczb (x, y) będące rozwiązaniem tego układu równań w zależności od parametru m . Wyznacz najmniejszą i największą wartość, jaką może przyjąć wyrażenie $\frac{x}{y}$.

Zad. 10

Wyznacz ilość rozwiązań równania $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5 - m = 0$ w zależności od parametru m .

Zad. 11

Wykaż, że funkcja $f(x) = 3x^5 + 10x^3 - 45x + 1$ ma dokładnie trzy miejsca zerowe.

Zad. 12

Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 4}$ oraz naszkicuj jej wykres.



Zad. 13

Funkcja $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ma w punkcie $x_1 = 2$ minimum lokalne równe (-7) .
Wyznacz wartość maksimum lokalnego funkcji f .

Zad. 14

Wyznacz kąt, pod jakim przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = 1 - x^2$ w punkcie o dodatniej odciętej.

Zad. 15

Wyznacz punkt należący do wykresu funkcji $f(x) = (x+1)^3 + (x-2)^2$ taki, że styczna do wykresu funkcji f w tym punkcie jest nachylona do osi OX pod kątem 135° .

Zad. 16

Liczbę 12 przedstaw w postaci sumy takich dwóch liczb dodatnich, aby suma ich odwrotności była najmniejsza.

Zad. 17

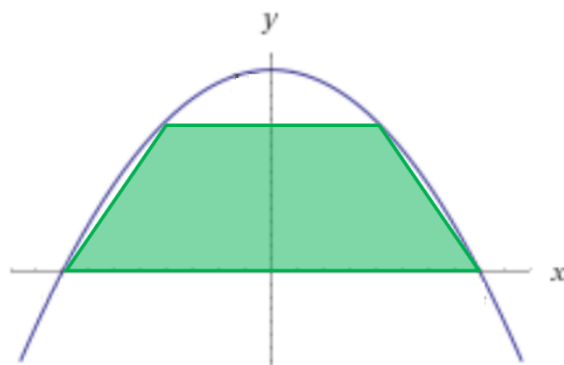
Na hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{1}{x}$ wyznacz punkt, którego odległość od punktu $A = (2, 2)$ jest najmniejsza. Oblicz tę odległość.

Zad. 18

Dany jest prostokąt o polu P . Wyznacz wymiary tego prostokąta tak, aby jego obwód był najmniejszy.

Zad. 19

Dana jest funkcja $f(x) = 16 - x^2$. W parabolę będącą wykresem funkcji f wpisano trapez równoramienny w taki sposób, że dłuższa podstawa trapezu leży na osi OX , a jej końce to miejsca zerowe funkcji f . Końce krótszej podstawy leżą na paraboli i znajdują się powyżej osi OX (zob. rysunek). Wykaż, że pole każdego takiego trapezu jest mniejsze od 76.

**Zad. 20**

Wyznacz promień podstawy i wysokość walca o objętości V , którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

KONIEC