



KURS

MATURA ROZSZERZONA

LEKCJA 7

Ciągi

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Liczby x , 9^{14} , 27^{12} tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Zatem liczba x jest równa:

- a) 3^{16}
- b) 3^{10}
- c) 3^{18}
- d) 3^{20}

Pytanie 2

Liczby a, b, c, d, e tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Wiadomo, że $a + e = 8$. Wtedy:

- a) $b + c = 8$
- b) $e = 8$
- c) $b + d = 12$
- d) $b + c + d = 12$

Pytanie 3

O pewnym ciągu geometrycznym wiadomo, że $a_5 = 5$. Zatem:

- a) $a_3 \cdot a_4 = 5$
- b) $a_1 \cdot a_9 = 25$
- c) $a_4 \cdot a_5 = 25$
- d) $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 = 75$

Pytanie 4

Ciągu określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4 \end{cases}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$:

- a) jest ciągiem malejącym
- b) jest ciągiem stałym
- c) ma skończoną ilość wyrazów dodatnich
- d) ma wyrazy niebędące liczbami całkowitymi

Pytanie 5

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazach $2, x, \dots$ oraz sumie $S = -1$. Wówczas prawdą jest, że:

- a) $x = 6$
- b) $x = -6$
- c) $q < 0$
- d) taki ciąg nie istnieje

Pytanie 6

Równanie $12 + 14 + 16 + 18 + \dots + x = 16740$ jest prawdziwe dla:

- a) $x = 258$
- b) $x = 256$
- c) $x = 129$
- d) $x = 124$

Pytanie 7

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 5$ oraz

$q = -\frac{3}{2}$:

- a) jest równa 2
- b) jest ujemna
- c) jest liczbą niewymierną
- d) nie istnieje

Pytanie 8

Dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej p granica właściwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n + 2^n}{3^n - 2^n}$ istnieje, jeśli:

- a) $p \in (0, 3)$
- b) $p \in (0, 3)$
- c) $p \in \langle 3, +\infty \rangle$
- d) $p \in (3, +\infty)$

Pytanie 9

Ciąg $a_n = \left| \frac{1}{x} \right|^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest zbieżny dla:

- a) $x \in \langle -1, 1 \rangle$
- b) $x \in (-1, 1)$
- c) $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, +\infty \rangle$
- d) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Pytanie 10

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1} \end{cases}$. Wówczas:

- a) (a_n) jest ciągiem geometrycznym
- b) (a_n) jest ciągiem arytmetycznym
- c) $a_5 - a_4 = 8$
- d) $a_6 = 4a_5$

Pytanie 11

Suma n początkowych wyrazów dana jest wzorem $S_n = 2n^2 + 5$. Zatem:

- a) $a_5 = 28$
- b) $a_5 = 23$
- c) $a_n = 4n + 2$
- d) $a_n = 4n - 2$

Pytanie 12

Dane są dwa ciągi o wyrazach dodatnich: (a_n) oraz (b_n) dany wzorem $b_n = \frac{1}{a_n}$. Wówczas:

- a) jeśli ciąg a_n jest arytmetyczny, to ciąg b_n również jest arytmetyczny
- b) jeśli ciąg a_n jest geometryczny, to ciąg b_n również jest geometryczny
- c) jeśli ciąg a_n jest arytmetyczny, to ciąg b_n jest geometryczny
- d) jeśli ciąg a_n jest rosnący, to ciąg b_n również jest rosnący

Pytanie 13

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2n^3 + n^2 + 2n + 1}{n^2 + 1}$. Wskaż informację fałszywą:

- a) ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym
- b) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi
- c) ciąg (a_n) ma granicę właściwą
- d) każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą nieparzystą

Pytanie 14

Wskaż ciąg, który nie posiada granicy właściwej:

a) $a_n = \frac{(n-1)^3}{n^2}$

b) $a_n = \frac{4^n - 2^2}{4^n + 2^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

d) $a_n = \left(\frac{3}{\sqrt{10} + 1}\right)^n$

Pytanie 15

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{(3n-5)(7n+2)}$. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Pytanie 16

Ciąg (a_n) zadany jest rekurencyjnie: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \end{cases}$. Wyznacz a_6 . Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Pytanie 17

Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+128}{n+8}$. Wyznacz największą możliwą liczbę naturalną będą wyrazem tego ciągu. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności kwadratu otrzymanego wyniku.



Pytanie 18

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o wyrazach $1, q, q^2, q^3, q^4, \dots$ jest o $\frac{1}{2}$ większa od sumy wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o wyrazach $1, -q, q^2, -q^3, q^4, -q^5, \dots$. Oblicz q . Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Pytanie 19

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną k , dla której wyraz a_k ciągu określonego wzorem

$$a_n = \frac{4n^2}{n^2 + 1}$$

jest oddalony od granicy tego ciągu o mniej niż $0,001$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Pytanie 20

W trójkąt równoboczny o boku 6 wpisujemy kolejny trójkąt równoboczny taki, że wierzchołkami drugiego trójkąta są środki boków pierwszego trójkąta. W drugi trójkąt wpisujemy kolejny na tej samej zasadzie i postępujemy tak nieskończenie wiele razy. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów. Zakoduj cyfrę dziesiątek, jedności i części dziesiątych rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Wykaż, że jeśli dodatnie liczby x, y, z tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny, to dla dowolnej dodatniej liczby a , liczby a^x, a^y, a^z tworzą ciąg geometryczny.

Zad. 2

Wykaż, że ciąg o wzorze $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ jest malejący.

Zad. 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Zad. 4

Rozwiąż równanie $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \frac{4}{3}$, gdzie lewa strona równania jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

Zad. 5

Wykaż, że ciąg (a_n) o wzorze $a_n = \frac{3n^2 - 17n + 20}{2n - 8}$ jest arytmetyczny.

Zad. 6

Trzy liczby, których suma wynosi 9, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do drugiej z nich dodać 1, a do trzeciej dodać 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.



Zad. 7

Trzy liczby, których suma wynosi 19, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli do drugiej i trzeciej dodamy po 1, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

Zad. 8

O pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że suma wyrazu pierwszego i piątego wynosi 16, a iloczyn wyrazu drugiego i czwartego wynosi 55. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Zad. 9

Dany jest ciąg (a_n) o początkowych wyrazach $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $a_4 = 1111$, Wyznacz wzór rekurencyjny tego ciągu.

Zad. 10

Liczby $\log \frac{3x}{x-4}$, $\log x$, $\log(x-2)$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Oblicz x .

Zad. 11

Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r_a , to ciąg (b_n) dany wzorem ogólnym $b_n = 3a_n - 4$ jest również ciągiem arytmetycznym o różnicy r_b . Wyznacz r_b w zależności od r_a .

Zad. 12

Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q_a , to ciąg (b_n) dany wzorem ogólnym $b_n = \frac{3}{\sqrt{2a_n}}$ jest również ciągiem geometrycznym o ilorazie q_b . Wyznacz q_b w zależności od q_a .

**Zad. 13**

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$.

Zad. 14

W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma pierwszych trzech wyrazów jest równa 26, a ich iloczyn jest równy 216. Wyznacz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zad. 15

Dany jest ciąg (a_n) , którego suma n pierwszych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 6 \cdot 5^{n+1} + 10$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Sprawdź, czy jest to ciąg geometryczny.

Zad. 16

Trzy liczby, których suma wynosi 52 tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są jednocześnie pierwszym, trzynastym i siedemnastym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Zad. 17

W kwadrat o boku a wpisano okrąg. W ten okrąg wpisano kolejny kwadrat, a w ten kwadrat kolejny okrąg. Postąpiono tak nieskończenie wiele razy. Wyznacz sumę pól wszystkich kwadratów.

Zad. 18

Wyznacz nieskończony ciąg geometryczny, w którym suma wszystkich wyrazów o indeksach nieparzystych stanowi $\frac{3}{4}$ sumy wszystkich wyrazów, a wyraz pierwszy jest o 24 większy od wyrazu trzeciego.



Zad. 19

Wyznacz najmniejszy wyraz ciągu o wzorze $a_n = \frac{\frac{1}{5}n^2 + 10}{n+1}$.

Zad. 20

Wyznacz nieskończony ciąg geometryczny, w którym suma wszystkich wyrazów jest równa 24, a suma kwadratów wszystkich wyrazów jest równa 288.

KONIEC