



MECHANIKA - STATYKA

Wzory podstawowe

Siła (wzór ogólny) $F = ma = mg [N]$

m - masa $[kg]$
 a - przyspieszenie $\left[\frac{m}{s^2} \right]$
 g - przyspieszenie ziemskie $\left[9,81 \frac{m}{s^2} \right]$

Moment siły $|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin(\alpha) [Nm]$

F - siła $\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$
 r - ramie $[m]$
 $\sin(\alpha)$ - sinus kąta pomiędzy wektorem ramienia i siły

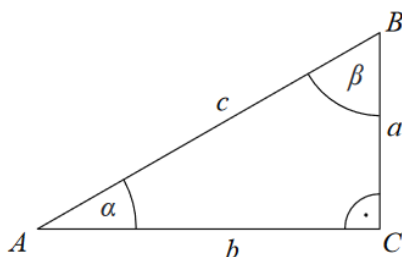
Pochodne

funkcja	pochodna funkcji	
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in R$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
$f(x) = \frac{a}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, gdy $g(x) \neq 0$

Przedrostki

Przedrostki												
mnożnik	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
przedrostek	tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Funkcje trygonometryczne



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

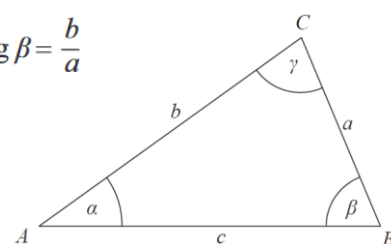
$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



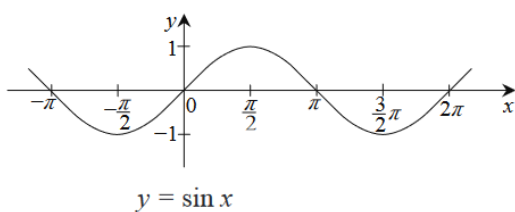
α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Twierdzenie Sinusów

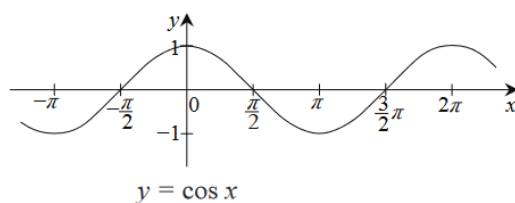
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Twierdzenie Cosinusów

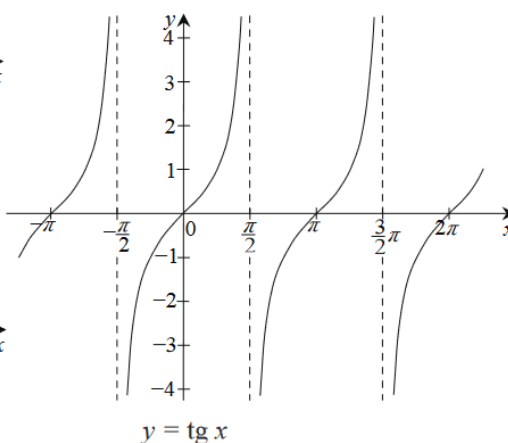
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

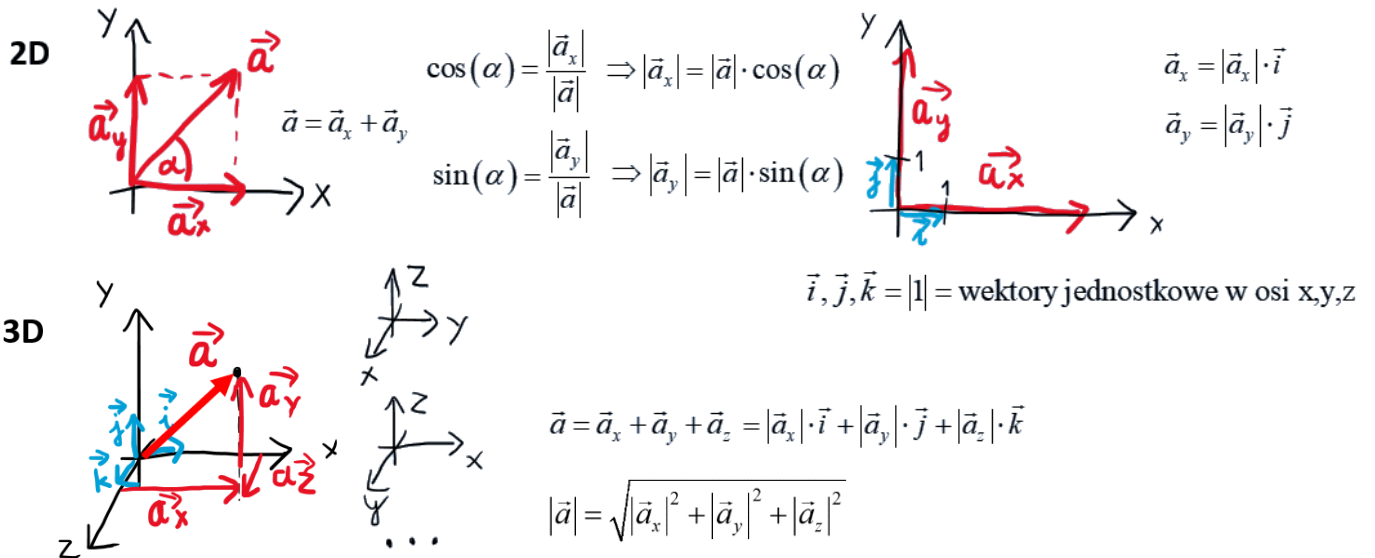
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	—	0

Wektory – przedstawienie analityczne



Wektory – dodawanie i odejmowanie

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (|\vec{a}_x| + |\vec{b}_x| - |\vec{c}_x|) \cdot \vec{i} + (|\vec{a}_y| + |\vec{b}_y| - |\vec{c}_y|) \cdot \vec{j} + (|\vec{a}_z| + |\vec{b}_z| - |\vec{c}_z|) \cdot \vec{k}$$

Wektory – mnożenie przez skalar

$$2\vec{a} = 2(|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{a}_y| \cdot \vec{j}) = 2|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + 2|\vec{a}_y| \cdot \vec{j}$$

Wektory – iloczyn skalarny

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (|\vec{a}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{a}_y| \cdot \vec{j}) \circ (|\vec{b}_x| \cdot \vec{i} + |\vec{b}_y| \cdot \vec{j}) = |\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_x| + |\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_y|$$

Wektory – iloczyn wektorowy

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}_x| & |\vec{a}_y| & |\vec{a}_z| \\ |\vec{b}_x| & |\vec{b}_y| & |\vec{b}_z| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}_x| & |\vec{a}_y| & |\vec{a}_z| \\ |\vec{b}_x| & |\vec{b}_y| & |\vec{b}_z| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ |\vec{a}_x| & |\vec{a}_y| & |\vec{a}_z| \\ |\vec{b}_x| & |\vec{b}_y| & |\vec{b}_z| \end{vmatrix}$$

$$= i(|\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_z| - |\vec{a}_z| \cdot |\vec{b}_y|) + j(|\vec{a}_z| \cdot |\vec{b}_x| - |\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_z|) + k(|\vec{a}_x| \cdot |\vec{b}_y| - |\vec{a}_y| \cdot |\vec{b}_x|) = \vec{c}$$

Wypadkowa dwóch sił

$$F_w = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\alpha)}$$

1. Zasada dynamiki

Jeśli na ciało nie działają siły lub się one równoważą, to ciało się nie porusza lub porusza się ruchem jednostajnym.

2. Zasada dynamiki

Jeśli na ciało działa siła wypadkowa to ciało porusza się z przyspieszeniem proporcjonalnym do działającej siły i odwrotności jego masy.

3. Zasada dynamiki

Jeśli jedno ciało działa na drugie pewną siłą, to ciało drugie oddziałuje na pierwsze taką samą siłą, lecz o przeciwnym zwrocie.

Zasady równowagi – Statyka

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Suma sił (dla każdej osi)} \\ \text{jest równa 0}$$

$$\sum M = 0 \leftarrow \text{dla dowolnego punktu}$$

$$\text{gdzie } M = rF \sin(\angle r, F)$$

Siła - kontakt z kulą



Kierunek sił w kontakcie z kulą jest prostopadły do punktu kontaktu.

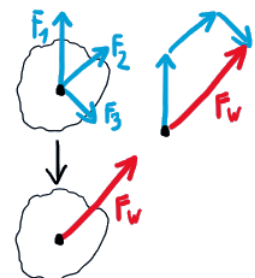
Zasada 3 sił

Trzy siły są w równowadze, jeśli ich linie przecinają się w jednym punkcie.



Układ sił zbieżnych

Układ, w którym wszystkie siły przecinają się w jednym punkcie. Można je zamienić na siłę wypadkową zaczepioną do tego punktu.



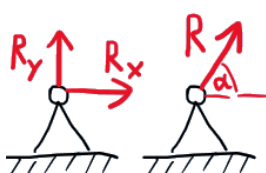
Podpory

Ilość stopni swobody (S) – ilość niezależnych zmiennych opisujących ruch/położenie

Podpora stała



S = 2



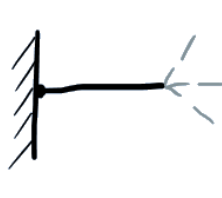
Podpora ruchoma



S = 1



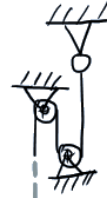
Utwierdzenie



S = 3



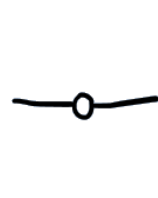
Cięgno



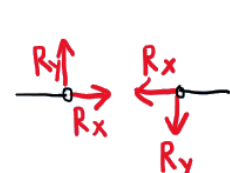
S = 1



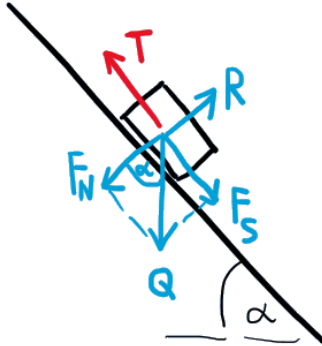
Przegub



S = 2



Siła tarcia – przeciwstawia się ruchowi (ma przeciwny zwrot niż wektor siły wywołującej ruch)



Q - siła ciężkości

F_N - siła nacisku

F_s - siła styczna (wywołuje ruch)

$R = F_N$ - reakcja podłoża

$T = \mu F_N = \mu R$ - siła tarcia

↑ ↑ współczynnik tarcia $\mu \in (0,1)$

Kratownica – układ prętów połączonych przegubowo (niezmienny geometrycznie)

Pręty mogą być:

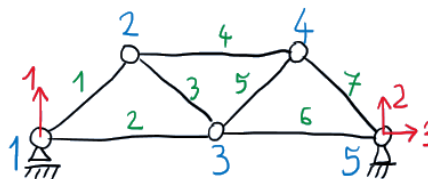


Obciążenia w węzłach:



Statyczna wyznaczalność:

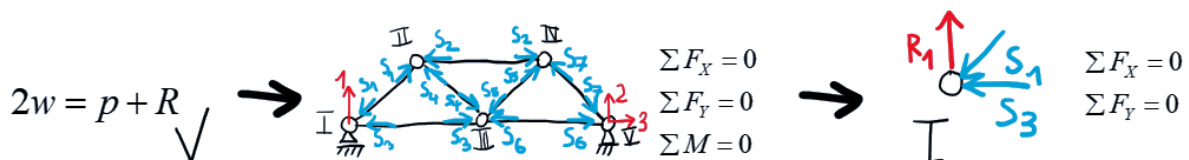
$2 \cdot w = p + R$ ← reakcje
wierzchołki/
przeguby pręty



$$\begin{aligned} 2 \cdot w &= p + R \\ w &= 5 \\ p &= 7 \\ R &= 3 \\ 2 \cdot 5 &= 7 + 3 \\ 10 &= 10 \quad \checkmark \end{aligned}$$

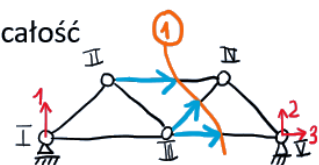
Metoda równoważenia węzłów - etapy rozwiązania:

1. Sprawdzamy statyczną wyznaczalność
2. Wyznaczamy reakcje w podporach -> traktujemy kratownice jako całość
3. Rozrysowujemy siły w prętach -> zakładamy, że są ściskane
4. Obliczamy sumę sił dla każdego węzła oddzielnie



Metoda Rittera (przecięć) - etapy rozwiązania:

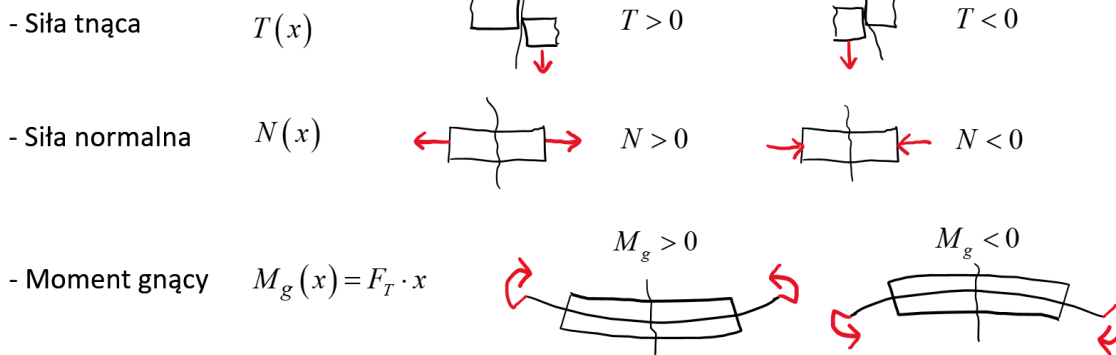
1. Sprawdzamy statyczną wyznaczalność $2w = p + R \checkmark$
2. Wyznaczamy reakcje w podporach -> traktujemy kratownice jako całość
3. Rozcinamy kratownice
-> zakładamy, że pręty są rozciągane
-> przecinamy tylko 3 pręty nierównoległe i nieschodzące się do jednego węzła
4. Obliczamy sumę momentów i sił dla każdego rozcięcia oddzielnie (wybieramy połówkę)
5. Tam gdzie inaczej się nie da, używamy metody wydzielania węzłów



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned}$$


Belka – element konstrukcyjny przenoszący głównie obciążenia poprzeczne (układ tarcz).

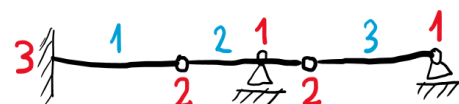
Założenia:



Siła tnąca: $T_L(x) = \frac{dM_g(x)}{dx}$ $T_P(x) = -\frac{dM_g(x)}{dx}$

Statyczna wyznaczalność:

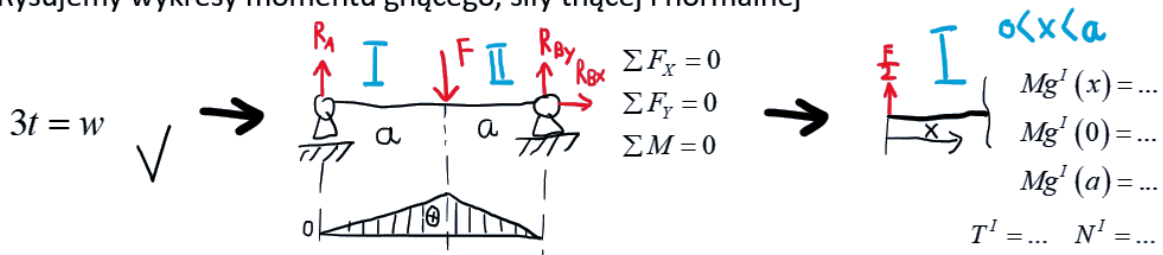
$3 \cdot t = w$ ← liczba więzów (reakcji)
liczba tarcz



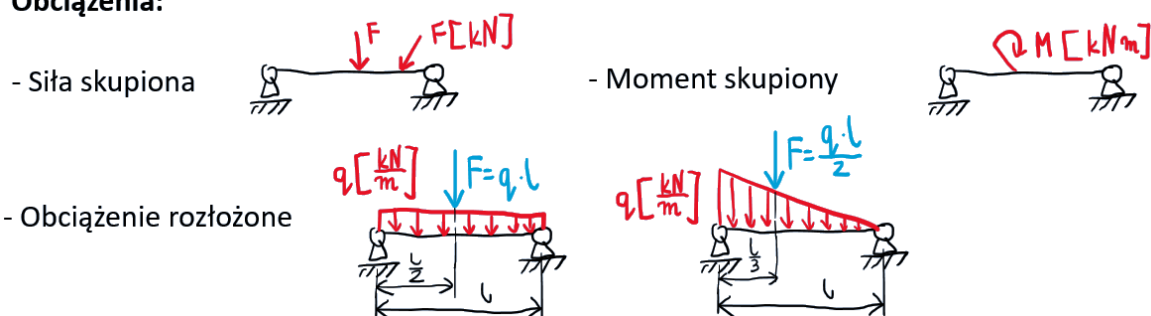
$t = 3$ $w = 9$
 $3 \cdot 3 = 9$
 $9 = 9$ ✓

Etapy rozwiązania:

1. Sprawdzamy statyczną wyznaczalność
2. Wyznaczamy reakcje w podporach -> traktujemy belkę jako całość
3. Dzielimy belkę na przedziały od lewej strony -> względem obciążeń i podpór
4. Obliczamy moment gnący, siłę tnącą i normalną dla każdego przedziału oddzielnie
5. Rysujemy wykresy momentu gnącego, siły tnącej i normalnej

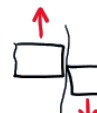
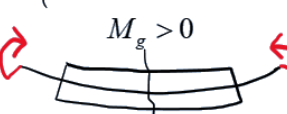


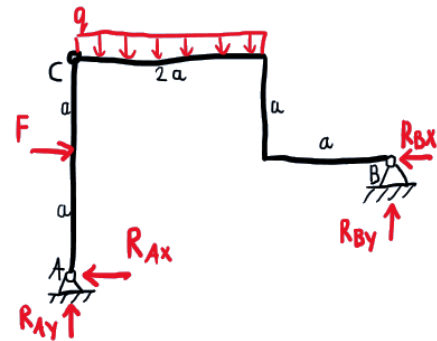
Obciążenia:



Rama: układ prętów obciążonych siłą skupioną, momentem lub obciążeniem rozłożonym w dowolnym miejscu na długości prętów.

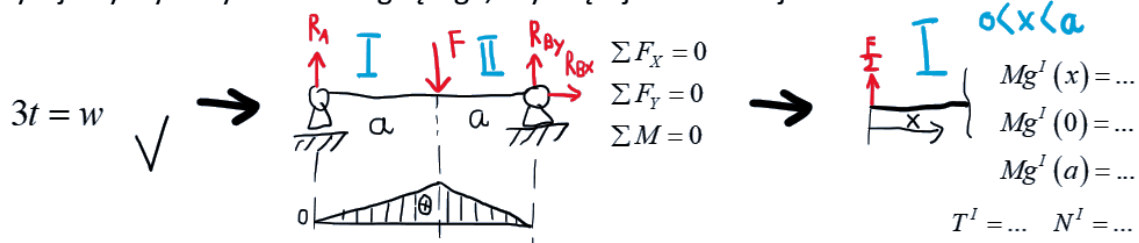
Założenia:

- Siła tnąca $T(x)$  $T > 0$
- Siła normalna $N(x)$  $N > 0$
- Moment gnący $M_g(x) = F_T \cdot x$  $M_g > 0$

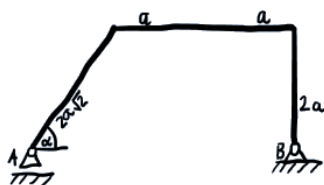


Etapy rozwiązania:

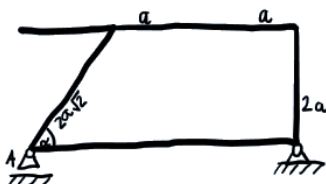
1. Sprawdzamy statyczną wyznaczalność
2. Wyznaczamy reakcje w podporach -> traktujemy ramę jako całość
3. Dzielimy ramę na przedziały -> względem obciążeń, podpór i „zgięć”
4. Obliczamy moment gnący, siłę tnącą i normalną dla każdego przedziału oddzielnie
5. Rysujemy wykresy momentu gnącego, siły tnącej i normalnej



Otwarta



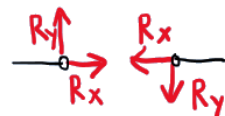
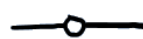
Zamknięta



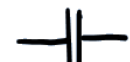
Rama zamknięta – dodatkowe kroki:

- > Otwieramy ramę przed „liczeniem przedziałów”
- > Gdzie najwygodniej otworzyć ramę:

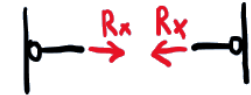
- przegub



- tyżwa



- ściąg



Środek ciężkości: punkt, w którym jest przyłożony wektor wypadkowej siły ciężkości.

Dla ciał jednorodnych: środek ciężkości = środek masy/pola

w **3D:**
 (x_0, y_0, z_0)
 m - masa

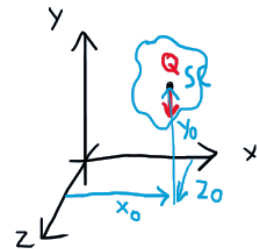
$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{S_{yz}}{\sum m_i}$$

gdzie $S_{yz} = \sum m_i x_i$

to moment statyczny względem płaszczyzny YZ

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{S_{xz}}{\sum m_i}$$

$$z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{S_{xy}}{\sum m_i}$$



w **2D:**

(x_0, y_0)

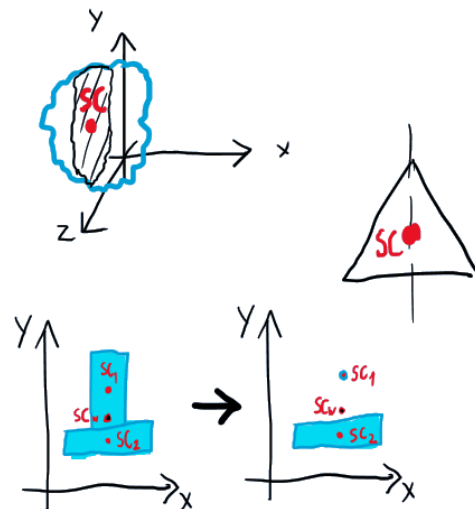
A - pole pow.

$$x_0 = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

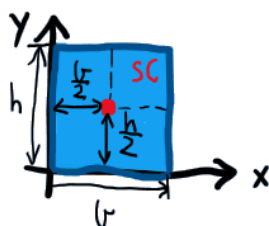
Środek ciężkości – twierdzenia:

1. Jeżeli środek ciężkości danego ciała leży na pewnej płaszczyźnie to moment statyczny jest równy 0.
2. Jeżeli ciało ma płaszczyznę lub oś symetrii to środek ciężkości leży na tym elemencie symetrii.
3. Środek ciężkości całego elementu nie zmienia się jeśli zastąpimy pewną część punktem materialnym o masie odjętej części i umieścimy ten punkt w środku ciężkości odjętej części.

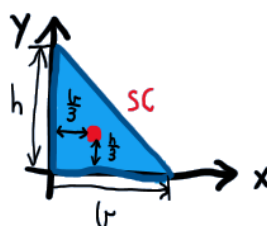


Środek ciężkości – podstawowe figury 2D:

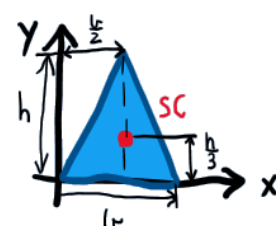
Prostokąt:



Trójkąt prostokątny:



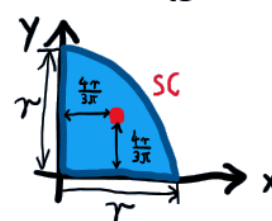
Trójkąt równoramienny:



Okrąg:

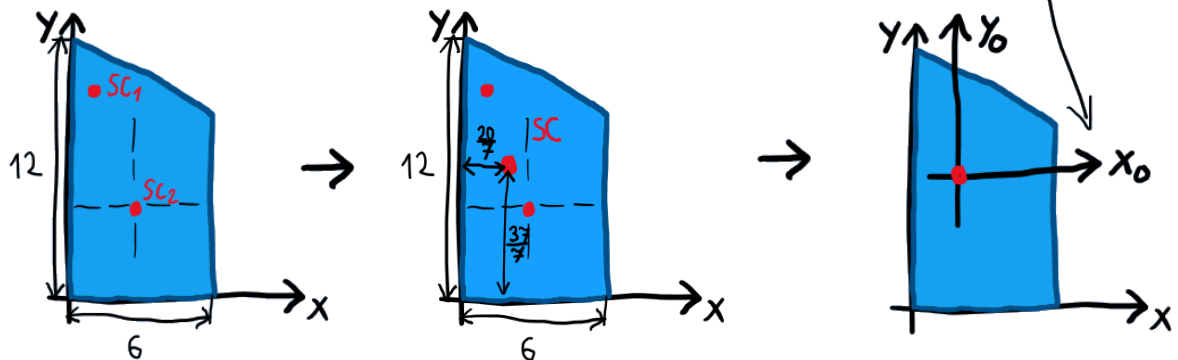


Ćwierćokrąg:



Oś centralne: oś przechodząca przez środek ciężkości.

Przykład z zad.2:



Moment bezwładności: określa bezwładność ciała w ruchu obrotowym względem wybranej osi.

Im większy moment bezwładności, tym trudniej obrócić ciało wokół danej osi (potrzeba większej siły)!

a) w 3D – względem płaszczyzny: $I_{xy} = \sum m_i z_i^2 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2 \text{]}$

(x, y, z)

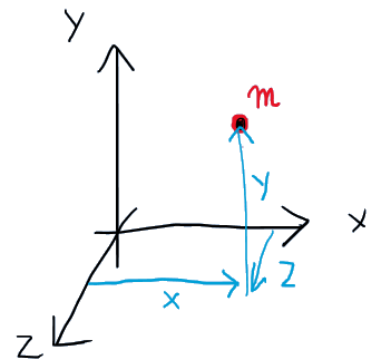
m - masa

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2 \quad I_{yz} = \sum m_i x_i^2$$

b) w 3D – względem osi:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2 + \sum m_i z_i^2 = I_{xz} + I_{xy}$$

$$I_y = I_{yz} + I_{xy} \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}$$



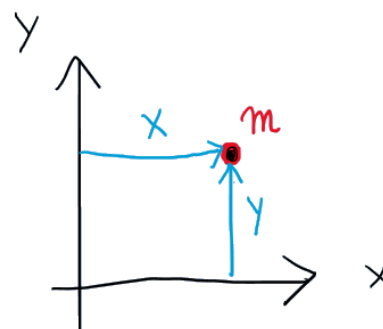
c) w 2D – dla punktów:

(x, y)

m - masa

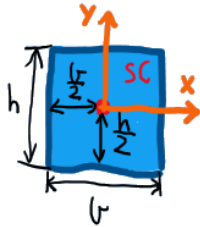
$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2$$



Moment bezwładności – podstawowe figury 2D:

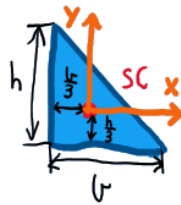
Prostokąt:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} [m^4]$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

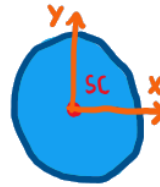
Trójkąt prostokątny:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$$

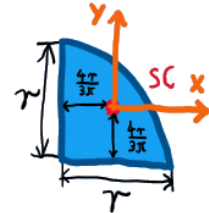
Okrąg:



$$I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

Ćwierćokrąg:



$$I_x \approx 0,055r^4$$

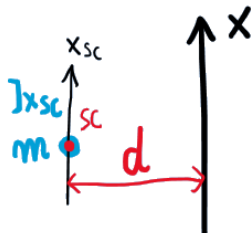
$$I_y \approx 0,055r^4$$

Twierdzenie Steinera – 2D:

Obliczanie momentów bezwładności względem osi innej niż przechodzącej przez środek ciężkości

dla układu mas

$$I_x = I_{x_{sc}} + md^2 [kg \cdot m^2]$$



dla figur płaskich

$$I_x = I_{x_{sc}} + Ad^2 [m^4]$$

