



KURS

REKURENCJE, NOTACJA O, GRUPY I PIERŚCIENIE (WYBRANE ZAGADNIENIA)

Lekcja 1
Elementy ciągów. Notacja O.

ZADANIE DOMOWE

Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Czym różni się zbiór od ciągu?

- a) Elementom ciągu można przypisać jakąś kolejność
- b) Ciąg nie ma elementów, tylko wartości
- c) Ciąg składa się zawsze z liczb, a zbiór niekoniecznie
- d) Niczym

Pytanie 2

Co oznacza wyrażenie: a_{2n} ?

- a) Ciąg, którego elementy są liczbami parzystymi
- b) „ n ”-ty wyraz ciągu pomnożony przez 2
- c) $2n$ pierwszych wyrazów ciągu
- d) Element ciągu o „numerze” dwa razy większym od n

Pytanie 3

Mając dany ciąg $a_n = 12 - n, n \geq 1$, jaki będzie jego 5-ty wyraz?

- a) 6
- b) 8
- c) 7
- d) 5

Pytanie 4

Jak prawidłowo rozpisać sumę $\sum 7n$?

- a) $7+14+21+28+\dots$
- b) $7,14,21,28,\dots$
- c) $7+49+343+2401+\dots$
- d) $7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \dots$

Pytanie 5

Ile równy będzie iloczyn $\prod_{i=1}^4 i$?

- a) 10
- b) ∞
- c) 24
- d) 4

Pytanie 6

Ile równe będzie $\frac{1024766!}{1024765!}$?

- a) 1024766
- b) 1024765
- c) 1
- d) 2

Pytanie 7

Element a należy do $\bigcup A_n$, jeżeli...

- a) Należy do byle jakiego zbioru z rodziny A_n
- b) Należy do wszystkich zbiorów z rodziny A_n
- c) Jest ciągiem o indeksie n
- d) Jest zbiorem

Pytanie 8

Które z poniższych zdań jest nieprawdziwe?

- a) $n^2 = O(n^2)$
- b) $n^2 = O(\sqrt{n})$
- c) $n^2 = O(n!)$
- d) $n^2 = O(n^3)$



Pytanie 9

Kiedy z definicji $a_n = O(b_n)$?

- a) Gdy dla dowolnej stałej dodatniej C , $|a_n| \leq C|b_n|$ od dostatecznie dużych n .
- b) Gdy $|a_n| \leq |b_n|$ od dostatecznie dużych n .
- c) Gdy istnieje taka stała dodatnia C , że: $|a_n| \leq C|b_n|$ od dostatecznie dużych n .
- d) Gdy $|a_n| \leq |b_n|$ i b_n zbiega do zera

Pytanie 10

Jeśli ciąg rosnący jest rzędu co najwyżej $O(1)$, oznacza to na pewno, że...

- a) Ciąg dla dostatecznie dużych n jest ciągiem stałym i przestaje rosnąć
- b) Ciąg cały czas rośnie, ale jego wartości nigdy nie przekroczą stałej 1
- c) Ciąg cały czas rośnie, ale jego wartości nigdy nie przekroczą jakiejś stałej
- d) To niemożliwe, żeby ciąg rosnący był rzędu co najwyżej $O(1)$

Część 2: ZADANIA

Zad.1

Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu, którego wyraz ogólny wyraża się wzorem:

a) $a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n}, n \geq 1$

b) $b_n = 1 - \frac{1}{2^n}, n \geq 0$

c) $c_n = \sin(\pi n), n \geq 1$

d) $d_n = (-1)^n \frac{1-n}{n}, n > 6$

Zad.2

Oblicz:

a) $\frac{8!}{6!}$

b) $\frac{8!}{4!2!}$

c) $\frac{12!}{0!12!}$

d) $\frac{9!}{5!}$

e) $\sum_{k=1}^4 \frac{k!}{2}$

f) $\prod_{i=2}^4 (i+1)$

Zad. 3

Uprość:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$

b) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

c) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!}$

Zad. 4

Oblicz:

- a) $\sum_{i=1}^4 3^i$
- b) $\sum_{n=0}^2 (n^2 - 2)$
- c) $\left(\sum_{n=0}^2 n^2\right) - 2$
- d) $\prod_{k=2}^5 (2k - 1)$

Zad. 5

Oblicz:

- a) $\prod_{i=1}^m \frac{i+1}{i}$ dla $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Korzystając z tych wyników, podaj ogólny wzór na ten iloczyn dla dowolnego m .
- b) $\sum_{k=0}^m 2^k$ dla $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Korzystając z tych wyników, podaj ogólny wzór na ten iloczyn dla dowolnego m .

Zad. 6

Oblicz $a_{n+1} - a_n$ dla następujących ciągów:

- a) $n^2 + 1$
- b) $\frac{3n+1}{n+2}$
- c) 2^n
- d) $\frac{1}{2^n}$

Zad. 7

Jaki jest zbiór wartości ciągów:

a) $a(n) = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^n\right)$

b) $b(n) = 1 + \cos(n\pi)$

c) $c(n) = n - 1, n \in \mathbb{N}_+$

Zad. 8

Dany jest ciąg $a(n) = 3n - 4$. Pokaż, że: $(a(6))^2 = (a(7))^2 - (a(5))^2 + 28$.

Zad. 9

Dany jest ciąg $S(n) = \sum_{k=1}^n k^2$. Dla jakich n $S(n+2) - S(n) = 85$?

Zad. 10

Znajdź $\bigcup_t A_t, \bigcap_t A_t$ dla $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x \in \mathbb{R}, A_t \subset \mathbb{R}$:

a) $A_t = \{x : -t \leq x \leq t\}$

b) $A_t = \{x : t \leq x\}$

c) $A_t = \left\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{t+1}\right\}$

d) $A_t = \left\{x : -\frac{1}{t+1} < x \leq \frac{1}{t+1}\right\}$

Zad. 11

Znajdź jak najmniejszą wartość α , taką, że $a_n = O(n^\alpha)$, dla poniższych ciągów:

a) $a_n = 2n^2 + n - 7$

b) $a_n = (2n + 7)^7$

c) $a_n = (10n + 1)(n^3 + n^2 - n + 1)$

d) $a_n = \sqrt{n+11}$

e) $a_n = \sqrt{n^2 - n}$

f) $a_n = (4n - 2)(n + 1)^2(n^2 - n + 1)$

Zad. 12

Oszacuj poniższe ciągi, korzystając z notacji O.

- a) 3^{n+2}
- b) $(4n^2 + n + 100)^6$
- c) 2^{2n}
- d) $(\log_2 n)^{54}$
- e) $(\sqrt{n} + 1)^{50}$

Zad. 13

Pokaż, że:

- a) $2n^2 + O(n) + 7n^3 + O(n^2) = 7n^3 + O(n^2)$
- b) $4n + n^3 + O(n) + O(n^2) = n^3 + O(n^2)$
- c) $(15n^4 + O(n^2))(2n^4 + O(n^2)) = 30n^8 + O(n^6)$

Zad. 14

Udowodnij, że:

$$\log_3 n = O(\log_2 n)$$

KONIEC