



KURS

REKURENCJE, NOTACJA O, GRUPY I PIERŚCIENIE (WYBRANE ZAGADNIENIA)

Lekcja 3

Wyznaczanie wzorów jawnych na ciąg
rekurencyjny

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Co umożliwia znalezienie wzoru jawnego na ciąg w postaci rekurencyjnej?

- a) Znalezienie np. setnego wyrazu ciągu przez proste podstawienie 100 do jednego wzoru.
- b) Znalezienie np. setnego wyrazu ciągu przed odwołanie do 99 wyrazu i 98 wyrazu.
- c) Rozwiązanie ciągu.
- d) Wyznaczenie równania charakterystycznego dla danej zależności rekurencyjnej i rozwiązanie go.

Pytanie 2

Jak wyglądać będzie równanie charakterystyczne dla zależności rekurencyjnej:

$$a_n = -7a_{n-1} + 12a_{n-2}?$$

- a) $r^2 - 7r + 12 = 0$
- b) $r^2 + 7r - 12 = 0$
- c) $r^2 - 12r + 7 = 0$
- d) $r^2 + 12r - 7 = 0$

Pytanie 3

Jak wyglądać będzie równanie charakterystyczne dla zależności rekurencyjnej: $a_n = 4a_{n-2}$?

- a) $r^2 + 4r = 0$
- b) $r^2 - 4r = 0$
- c) $r^2 + 4 = 0$
- d) $r^2 - 4 = 0$

Pytanie 4

Niech r_1, r_2 oznaczają różne od siebie pierwiastki równania charakterystycznego pewnej zależności rekurencyjnej $a_n = ba_{n-1} + ca_{n-2}$. Jaką postać jawną może mieć ten ciąg rekurencyjny?

- a) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in R$
- b) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad c_1, c_2 \in R$ lub nie mieć w ogóle postaci jawnej
- c) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_2^n, \quad c_1, c_2 \in R$
- d) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_2^n, \quad c_1, c_2 \in R$ lub nie mieć w ogóle postaci jawnej

Pytanie 5

W której zależności rekurencyjnej możemy wykorzystać wzór

$$a_{2^k} = 2^k \left[a_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(2^i)}{2^i} \right], \quad \text{dla } k \in N \cup \{0\},$$
 dla policzenia wyrazów o numerach równych potęgom 2?

- a) $a_n = 2a_{n-1} + 4n + 1$
- b) $s_{2n} = 2s_n + n^2 + 3n + 2$
- c) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}$
- d) $a_{2n} = 2a_n + 55a_{n-1}$

Pytanie 6

Mamy znaleźć wzór jawny na pewien ciąg rekurencyjny a_n . Która metoda postępowania jest prawidłowa?

- a) Odgadnąć w dowolny sposób wzór w postaci jawnej, a później uzasadnić go indukcyjnie.
- b) Rozpocząć od dowodu indukcyjnego, a na końcu podać wzór w postaci jawnej.
- c) Najpierw udowodnić indukcyjnie ciąg rekurencyjny a_n , a potem wzór w postaci jawnej na a_n .
- d) Odgadnąć wzór na a_n przez wypisanie odpowiedniej liczby początkowych wyrazów.



Pytanie 7

Jakie jest założenie indukcyjne w uogólnionej zasadzie indukcji matematycznej?

- a) Twierdzenie (lub wzór) $p(k)$ jest prawdziwe dla wszystkich k mniejszych lub równych od dowolnie ustalonego n (i większych lub równych jakiemuś wyrazowi początkowemu k_0).
- b) Twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnie ustalonego n .
- c) Twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego $n + 1$.
- d) Twierdzenie jest prawdziwe dla dwóch wyrazów poprzedzających dowolnie ustalone n .

Pytanie 8

Jaka jest teza indukcyjna w uogólnionej zasadzie indukcji matematycznej?

- a) Twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnych $n + k$, gdzie n jest ustalone w założeniu indukcyjnym.
- b) Twierdzenie jest prawdziwe dla $n + 1$, gdzie n jest ustalone w założeniu indukcyjnym.
- c) Twierdzenie jest prawdziwe dla n ustalonego w założeniu indukcyjnym.
- d) Twierdzenie jest prawdziwe.

Pytanie 9

Pan Kowalski 14 lipca zaciągnął kredyt na 10000. Pod koniec każdego miesiąca kwota kredytu zostaje powiększona o odsetki równe 1%. Pan Kowalski w każdy dzień po wypłacie (11 dzień miesiąca) spłaca 500zł raty. Niech wyrazy ciągu $a_1, a_2, \dots$ oznaczają kwoty kredytu pozostałe do spłaty po 1, 2, ... miesiącach. Jak rekurencyjnie wyglądać będzie ciąg a_n ?

- a)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 10000 + 1,01a_{n-1} - 500, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} a_0 = 10000 \\ a_n = 1,01a_{n-1} - 500, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 1,01a_{n-1} - 500, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} a_0 = 10000 \\ a_n = 1,01(a_{n-1} - 500) \end{cases}$$



Pytanie 10

W jakich przypadkach stosować można indukcję w ciągach rekurencyjnych?

- a) Tylko przy szukaniu wyrazu jawnego ciągu.
- b) Tylko przy szukaniu wyrazu jawnego ciągu lub określaniu parzystości/nieparzystości wyrazów.
- c) Dowolnych.
- d) Tylko, gdy zależność rekurencyjna jest postaci: $a_n = ba_{n-1} + ca_{n-2}$, $b, c \in R$

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Znajdź wzór jawny ciągu.

- a)
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 3 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 5 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}, \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 6 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} + 16a_n, \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$
- e)
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \quad \text{dla } n \geq 0 \end{cases}$$

Zad. 2

Znajdź wzór jawny na a_{2^k} -ty wyraz ciągu.

- a) $a_1 = 1, a_{2n} = 2a_n + 3$
- b) $a_1 = 0, a_{2n} = 2a_n + 5 - 7n$
- c) $a_1 = 1, a_{2n} = 2a_n + n^2$

Zad. 3

Znajdź wzór na wyraz jawny ciągu i uzasadnij go indukcyjnie.

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2 \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} - 4 \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} a_0 = -3 \\ a_n = \frac{1}{2a_{n-1}} \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zad. 4

Mamy dany ciąg Fibonacciego:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Zad. 5

Mamy dany ciąg: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3} \quad \text{dla } n \geq 3$.

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

**Zad. 6**

Mamy dany ciąg: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geq 3$.

Udowodnij indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $2^n \leq a_n \leq 2^{n+1}$, oraz spełniona jest zależność $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n-1}$.

Zad. 7

Pewien pracownik rozpoczyna pracę w zakładzie ze średnią pensją miesięczną 1000zł. Po roku otrzymał podwyżkę pensji o 10%. Od tej pory w każdym roku otrzymuje systematycznie pensję zwiększoną o 50% w stosunku do ostatniego roku i pomniejszoną o 50% w stosunku do przedostatniego roku. Wyznacz wzór jawny na pensję pracownika po n latach. Ile zarabia pracownik po 10 latach stażu?

KONIEC