



KURS REKURENCJE, NOTACJA O, GRUPY I PIERŚCIENIE (WYBRANE ZAGADNIENIA)

Lekcja 6
Grupy

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Prawo łączności opisuje równanie:

- a) $a \circ b = b \circ a$
- b) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- c) $a \circ (b \oplus c) = (a \oplus b) \circ (a \oplus c)$
- d) $a \circ e = a$

Pytanie 2

Element neutralny $e \in G$ działania $\circ$ w niepustym zbiorze G spełnia dla każdego $g \in G$ następujący warunek:

- a) $g^{-1} = e$
- b) $g^{-1} \circ e = g$
- c) $g \circ e = g^{-1}$
- d) $g \circ e = e \circ g = g$

Pytanie 3

Element g^{-1} odwrotny do elementu g ma następującą własność:

- a) $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$
- b) $g^{-1} \circ e = e \circ g = e$
- c) $g^{-1} = g \circ e = e \circ g$
- d) $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g$



Pytanie 4

Jeśli struktura $(G, \circ)$ jest grupą, to dla działania $\circ$ zachodzi na pewno:

- a) prawo przemienności
- b) prawo łączności
- c) prawo odwrotności
- d) prawo neutralności

Pytanie 5

Zapis $(\mathbb{Z}, +)$ oznacza:

- a) zbiór liczb całkowitych poszerzony o dodatkowe elementy
- b) działanie dodawania liczb całkowitych
- c) zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania określonym na tym zbiorze
- d) zbiór liczb całkowitych dodatnich

Pytanie 6

Grupą nie jest struktura:

- a) $(\mathbb{N}, +)$
- b) $(\mathbb{Z}, +)$
- c) $(\mathbb{Q}, +)$
- d) $(\mathbb{R}, +)$

Pytanie 7

Grupę generowaną przez element $g \in G$ nazywamy grupą:

- a) generacyjną
- b) cykliczną
- c) cyklometryczną
- d) lewostronną



Pytanie 8

Podgrupą generowaną przez A nazywamy zbiór $\langle A \rangle$ złożony ze wszystkich możliwych wyników działań ze sobą elementów zbioru:

- a) A
- b) $A \cup A^{-1}$
- c) $A \cap A^{-1}$
- d) A^{-1}

Pytanie 9

Niech H będzie podgrupą grupy G . Zbiór postaci $g \circ H = \{gh : h \in H\}$ dla pewnego elementu $g \in G$ nazywamy:

- a) podgrupą cykliczną
- b) podgrupą generowaną
- c) warstwą prawostronną
- d) warstwą lewostronną

Pytanie 10

Rzędem elementu g grupy G nazywamy:

- a) liczbę elementów odwrotnych do g
- b) liczbę podgrup generowanych przez g
- c) liczbę elementów grupy $\langle g \rangle$
- d) liczbę elementów grupy G

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Sprawdź, czy podana struktura jest grupą. Jeśli tak, sprawdź, czy jest to grupa przemienna.

- a) $(\mathbb{N}, -)$, gdzie „ $-$ ” jest zwykłym działaniem odejmowania
- b) $(\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b + 1$
- c) $(\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a^2 + b - 1$
- d) $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b + ab$
- e) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +)$, gdzie $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ oraz „ $+$ ” jest zwykłym działaniem dodawania
- f) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \circ)$, gdzie $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + 1)$
- g) $(\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a^b$
- h) $(Gl(3), \cdot)$, gdzie $Gl(3)$ to zbiór macierzy odwracalnych wymiaru 3×3 oraz „ $\cdot$ ” jest działaniem mnożenia macierzy
- i) $(R[x], +)$, gdzie $R[x]$ to zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych oraz „ $+$ ” jest działaniem dodawania wielomianów
- j) $(G, \circ)$, gdzie $G = [0, 1)$ oraz $a \circ b = \begin{cases} a + b, & a + b < 1 \\ a + b - 1, & a + b \geq 1 \end{cases}$

Zad. 2

Wyznacz podgrupę generowaną przez dany zbiór należący do grupy $(\mathbb{Z}, +)$. Sprawdź, czy wyznaczona podgrupa jest grupą cykliczną.

- a) $\langle \{6\} \rangle$
- b) $\langle \{5, 6\} \rangle$
- c) $\langle \{-6, 4\} \rangle$
- d) $\langle \{7\} \rangle \cap \langle \{3\} \rangle$
- e) $\langle \{16\} \rangle \cup \langle \{24\} \rangle$

Zad. 3

Znajdź wszystkie generatory grupy:

- a) $(\mathbb{Z}_7, +_7)$
- b) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$
- c) $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$

Zad. 4

Wyznacz warstwę lewostronną w następujących przykładach

- a) podgrupy $3\mathbb{Z}$ grupy $(\mathbb{Z}, +)$ dla elementu $g = 13$
- b) podgrupy $5\mathbb{Z}$ grupy $(\mathbb{Z}, +)$ dla elementu $g = 129$
- c) podgrupy $\{2, 4\}$ grupy $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ dla elementu $g = 5$
- d) podgrupy $\{0, 3, 6, 9\}$ grupy $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ dla elementu $g = 3$
- e) podgrupy $Gl(3)$ grupy $(Gl(n), \cdot)$ dla elementu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Zad. 5

Poniższa tabelka ilustruje działanie $\circ$ w zbiorze $A = \{e, x, y\}$ z e jako elementem neutralnym. Sprawdź, czy podana tabelka reprezentuje grupę ze względu na działanie $\circ$.

a)

$\circ$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	x
y	y	y	e

b)

$\circ$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

Zad. 6

Poniższa tabelka ilustruje działanie $*$ w zbiorze $A = \{e, a, b, c, d\}$ z e jako elementem neutralnym.

$*$	<u>e</u>	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>d</u>
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	d	c
b	b	e	a	a	b
c	c	d	a	e	a
d	d	c	b	a	e

- Sprawdź, czy zbiór $\{e, a, b\}$ jest grupą ze względu na działanie $*$.
- Korzystając z twierdzenia Lagrange'a sprawdź, czy struktura $(A, *)$ może być grupą.

Zad. 7

Poniższa tabelka ilustruje grupę z działaniem $\circ$ w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z „0” jako elementem neutralnym.

$\circ$	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

- Wypisz elementy podgrupy $\langle 5 \rangle$.
- Wypisz elementy podgrupy $\langle 3 \rangle$.
- Znajdź warstwy $A / \langle 3 \rangle$.
- Wyznacz $|A / \langle 3 \rangle|$.

KONIEC