



KURS REKURENCJE, NOTACJA O, GRUPY I PIERŚCIEŃ (WYBRANE ZAGADNIENIA)

Lekcja 7 Pierścienie i ciała

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Pierścień to struktura algebraiczna, w której wyróżniamy:

- a) jedno działanie
- b) dwa działania
- c) trzy działania
- d) dowolną ilość działań

Pytanie 2

Jeśli struktura $(X, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem, to działanie $\oplus$ jest:

- a) tylko przemienne
- b) tylko łączne
- c) przemienne i łączne
- d) żadne z powyższych

Pytanie 3

Jeśli struktura $(X, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem, to:

- a) żadne z działań nie posiada elementu neutralnego w zbiorze X
- b) oba działania muszą posiadać element neutralny w zbiorze X
- c) działanie $\odot$ musi posiadać element neutralny w zbiorze X
- d) działanie $\oplus$ musi posiadać element neutralny w zbiorze X



Pytanie 4

Pierścień z jedynką to pierścień $(X, \oplus, \odot)$, w którym:

- a) do zbioru X należy liczba 1
- b) działanie $\oplus$ posiada element neutralny w zbiorze X
- c) działanie $\odot$ posiada element neutralny w zbiorze X
- d) zbiór X jest zbiorem jednoelementowym

Pytanie 5

Podpierścień pierścienia $(X, \oplus, \odot)$:

- a) nie jest pierścieniem
- b) jest również pierścieniem
- c) musi być pierścieniem z jedynką
- d) musi być pierścieniem przemennym

Pytanie 6

Wśród poniższych struktur pierścieniem nie jest:

- a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
- b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- d) $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$

Pytanie 7

Jeśli struktura $(X, \oplus, \odot)$ jest ciałem, to:

- a) tylko działanie $\oplus$ jest przemienne
- b) tylko działanie $\odot$ jest przemienne
- c) oba działania są przemienne
- d) żadne z powyższych

Pytanie 8

Jeśli struktura $(X, \oplus, \odot)$ jest ciałem, to:

- a) może być również pierścieniem
- b) musi być również pierścieniem
- c) nie może być pierścieniem
- d) to zależy od zbioru X

Pytanie 9

Wśród poniższych struktur ciałem nie jest:

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- c) $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną
- d) $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$, gdzie p jest dowolną liczbą pierwszą

Pytanie 10

Podciało ciała:

- a) może być podpierścieniem tego ciała
- b) nie może być podpierścieniem tego ciała
- c) musi być podpierścieniem tego ciała
- d) to zależy od działań zdefiniowanych w ciele

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Sprawdź, czy podana struktura jest pierścieniem. Jeśli tak, sprawdź, czy jest to pierścień przemienny oraz czy jest to pierścień z jedyneką.

- $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, gdzie $a \oplus b = a + b + 2$ oraz $a \odot b = a + ab$
- $(R[x], +, \cdot)$, gdzie $R[x]$ to zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych oraz „+” i „ $\cdot$ ” są odpowiednio działaniami dodawania i mnożenia wielomianów
- $(Gl(2), \oplus, \odot)$, gdzie $Gl(2)$ to zbiór macierzy odwracalnych wymiaru 2×2 oraz „ $\oplus$ ” i „ $\odot$ ” są odpowiednio działaniami dodawania i mnożenia macierzy
- $(\mathbb{Q}(i\sqrt{2}), +, \cdot)$, gdzie $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \{a + ib\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ oraz „+” i „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia
- $(\{a\}, \oplus, \odot)$, gdzie $a \oplus a = a$ oraz $a \odot a = a$
- $\left(\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in Gl(2) : a, b \in \mathbb{Z} \right\}, \oplus, \odot \right)$, gdzie $Gl(2)$ to zbiór macierzy odwracalnych wymiaru 2×2 oraz „ $\oplus$ ” i „ $\odot$ ” są odpowiednio działaniami dodawania i mnożenia macierzy

Zad. 2

Sprawdź, czy podana struktura P_1 jest podpierścieniem pierścienia P_2 .

- $P_1 = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$; $P_2 = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia
- $P_1 = \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in Gl(2) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \oplus, \odot \right)$; $P_2 = (Gl(2), \oplus, \odot)$, gdzie $Gl(2)$ to zbiór macierzy odwracalnych wymiaru 2×2 oraz „ $\oplus$ ” i „ $\odot$ ” są odpowiednio działaniami dodawania i mnożenia macierzy

Zad. 3

Sprawdź, czy podana struktura jest ciałem:

- a) $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$
- b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia
- c) $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, +, \cdot)$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia

Zad. 4

Sprawdź, czy podany pierścień jest ciałem:

- a) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, gdzie $a \oplus b = a + b + 1$ oraz $a \odot b = a + b + ab$
- b) $\left(\left\{ \frac{a}{2^b} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}, +, \cdot \right)$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia

Zad. 5

Sprawdź, czy podana struktura C_1 jest podciałem ciała C_2 .

- a) $C_1 = (\{ai : a \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$; $C_2 = (\mathbb{C}, +, \cdot)$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia
- b) $C_1 = (\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$; $C_2 = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, gdzie „+” oraz „ $\cdot$ ” są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia

KONIEC