



KURS PLANIMETRIA

LEKCJA 5 PODSTAWOWA Okręgi i koła

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Kąt środkowy oparty na łuku długości 6π ma miarę 40° . Promień tego okręgu ma długość:

- a) 12
- b) 18
- c) 24
- d) 27

Pytanie 2

Promień okręgu $o(O, r)$ ma długość $r = a + 3$, a odległość środka tego okręgu od prostej k wynosi $a - 1$, gdzie $a > -3$. Zatem:

- a) prosta k jest styczna do okręgu o
- b) prosta k jest rozłączna z okręgiem o
- c) prosta k jest sieczną okręgu o
- d) wzajemne położenie prostej k i okręgu o zależy od parametru a

Pytanie 3

Na okręgu zaznaczono łuk stanowiący $\frac{1}{4}$ tego okręgu. Przez końce tego łuku poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się w punkcie A . Kąt, pod którym widać okrąg z punktu A , ma miarę:

- a) 90°
- b) 75°
- c) 60°
- d) 45°



Pytanie 4

Dane są okręgi o promieniach $4a$ i $6a$, gdzie $a > 0$. Odległość między środkami tych okręgów wynosi $2a$. Zatem okręgi te są:

- a) styczne zewnętrznie
- b) styczne wewnętrznie
- c) rozłączne zewnętrznie
- d) rozłączne wewnętrznie

Pytanie 5

Kąt wpisany oparty na półokręgu ma miarę:

- a) 90°
- b) 120°
- c) 180°
- d) 360°

Pytanie 6

Promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 5, 12, 13 jest równy:

- a) 6
- b) 6,5
- c) 7
- d) 8

Pytanie 7

Promień okręgu wpisanego w trójkąt o boku długości a jest równy:

- a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- c) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$
- d) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$



Pytanie 8

W pewnym trójkącie środek okręgu opisanego na tym trójkącie pokrywa się ze środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zatem trójkąt ten jest:

- a) prostokątny
- b) rozwartokątny
- c) równoboczny
- d) różnoboczny

Pytanie 9

Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na jego boku długości x . Długość tego okręgu jest równa:

- a) x
- b) $2x$
- c) πx
- d) $2\pi x$

Pytanie 10

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość 10, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 4. Suma długości przyprostokątnych tego trójkąta wynosi:

- a) 14
- b) 18
- c) 24
- d) 28



Część 2: ZADANIA

Zad. 1

- a) Wyznacz długość okręgu o promieniu 7.
- b) Wyznacz długość okręgu o promieniu $\frac{1}{\pi}$.
- c) Wyznacz promień okręgu, którego długość wynosi 12π .
- d) Wyznacz promień okręgu, którego długość wynosi 16.
- e) Łuk stanowiący 25% okręgu ma długość 6π . Wyznacz promień tego okręgu.
- f) Łuk stanowiący $\frac{1}{12}$ okręgu ma długość 12π . Wyznacz promień tego okręgu.
- g) Jaką część okręgu o promieniu 8 stanowi łuk długości 2π ?
- h) Jaką część okręgu o promieniu 12 stanowi łuk długości 6?

Zad. 2

- a) W okręgu o promieniu 13 poprowadzono cięciwę długości 10. Oblicz odległość tej cięciwy od środka okręgu.
- b) W okręgu o długości 50π poprowadzono cięciwę, której odległość od środka okręgu wynosi 24. Oblicz długość tej cięciwy.
- c) Oblicz długość okręgu, jeśli cięciwa poprowadzona w odległości 12 od środka tego okręgu ma długość 18.
- d) Cięciwa AB oraz cięciwa BC są do siebie prostopadłe, a cięciwa AC przechodzi przez środek okręgu. Odległość cięciwy BC od środka okręgu jest równa 6, a promień tego okręgu wynosi 10. Oblicz obwód trójkąta ABC .
- e) Średnica AB okręgu i cięciwa CD tego okręgu są do siebie równoległe, a różnica ich długości wynosi 2. Oblicz długość tego okręgu, jeśli odległość cięciwy CD od średnicy AB wynosi 7.

Zad. 3

Ustal wzajemne położenie prostej k i okręgu, jeśli:

- a) promień okręgu ma długość 4, a odległość prostej k od środka tego okręgu wynosi $3\sqrt{2}$
- b) długość okręgu wynosi 12π , a odległość prostej k od środka okręgu wynosi 5



- c) długość okręgu wynosi $4\pi^2$, a odległość prostej k od środka okręgu wynosi 2π
- d) długość okręgu wynosi $6\pi^2$, a odległość prostej k od środka okręgu wynosi $3\sqrt{7}$

Zad. 4

Dany jest okrąg o o promieniu r oraz prosta k , której odległość od środka okręgu o wynosi d . Zbadaj wzajemne położenie okręgu o i prostej k w zależności od parametru a , jeśli:

- a) $r = 9, d = 3a$
- b) $r = a, d = 8 - a$
- c) $r = a - 1, d = a + 1$
- d) $r = a + 3, d = a - 2$

Zad. 5

Końce średnicy AB okręgu są oddalone od stycznej do tego okręgu o odpowiednio 8 i 12. Oblicz długość tego okręgu.

Zad. 6

Okręgi $o(O_1, 9)$ oraz $o(O_2, 4)$ są styczne zewnętrznie. Poprowadzono prostą styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B . Oblicz pole czworokąta ABO_2O_1 .

Zad. 7

Dwie styczne do okręgu przecinają się w punkcie P leżącym poza tym okręgiem. Okrąg ten jest widoczny z punktu P pod α . Oblicz miarę kąta utworzonego przez promienie poprowadzone do punktów styczności danych stycznych, jeśli:

- a) $\alpha = 120^\circ$
- b) $\alpha = 68^\circ$
- c) $\alpha = 135^\circ$
- d) $\alpha = 32^\circ$

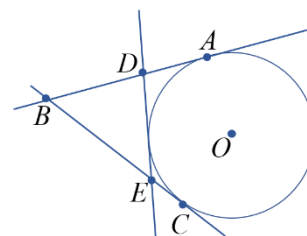
Zad. 8

Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6. Z punktu A leżącego poza tym okręgiem poprowadzono styczne do okręgu odpowiednio w punktach B i C .

- Oblicz pole czworokąta $ABOC$, jeśli kąt, pod jakim widać okrąg z punktu A ma miarę 120°
- Oblicz, pod jakim kątem widać okrąg z punktu A , jeśli pole czworokąta $ABOC$ wynosi $36\sqrt{3}$.

Zad. 9

Proste AB, BC, DE są styczne do okręgu o środku O i promieniu $r = 5$, jak na rysunku. Oblicz obwód trójkąta BDE , wiedząc że odległość punktu B od środka okręgu jest równa 13.


Zad. 10

W trójkąt ABC wpisano okrąg, który jest styczny do boku AB w punkcie D . Oblicz obwód trójkąta ABC , wiedząc że $|AD| = 6$ oraz $|BC| = 14$.

Zad. 11

Ustal wzajemne położenie okręgów $o(O_1, r_1)$ oraz $o(O_2, r_2)$, jeśli:

- $r_1 = 3, r_2 = 4, |O_1O_2| = 7$
- $r_1 = 5, r_2 = 8, |O_1O_2| = 3$
- $r_1 = 6, r_2 = 5, |O_1O_2| = 12$
- $r_1 = 8, r_2 = 5, |O_1O_2| = 11$
- $r_1 = 10, r_2 = 7, |O_1O_2| = 2$

Zad. 12

Dane są okręgi $o(O_1, r_1)$ oraz $o(O_2, r_2)$. Zbadaj wzajemne położenie tych okręgów w zależności od parametru a , jeśli:

- $r_1 = 3, r_2 = 4, |O_1O_2| = a$
- $r_1 = a - 2, r_2 = a + 1, |O_1O_2| = 11$



Zad. 13

Dane są okręgi $o(O_1, r_1)$ oraz $o(O_2, r_2)$. Wyznacz ich promienie, jeśli:

- a) są styczne wewnętrznie, odległość między ich środkami wynosi 6 oraz r_2 jest trzy razy dłuższy od r_1
- b) są styczne zewnętrznie, odległość między ich środkami wynosi 10 oraz r_1 jest o 2 dłuższy od r_2
- c) gdyby były styczne zewnętrznie, to odległość między ich środkami wynosiłaby 20, a gdyby były styczne wewnętrznie, to odległość między ich środkami wynosiłaby 6

Zad. 14

Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Promień większego z nich wynosi 17, a jego cięciwa styczna do mniejszego okręgu ma długość 30. Oblicz promień mniejszego okręgu.

Zad. 15

Dane są okręgi $o(O_1, 6)$ oraz $o(O_2, 9)$ rozłączne zewnętrznie. Poprowadzono prostą styczną wewnętrznie do obu tych okręgów. Oblicz odległość między środkami okręgów, jeśli odległość między punktami styczności prostej z okręgami wynosi 20.

Zad. 16

- a) Dane są dwa okręgi współśrodkowe o promieniach 10 i 14. Oblicz pole pierścienia kołowego utworzonego przez te okręgi.
- b) Dwa współśrodkowe okręgi tworzą pierścień kołowy o polu 36π . Oblicz długości promieni tych okręgów, jeśli wiadomo, że różnią się one o 2.
- c) Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa większego z nich styczna do mniejszego okręgu ma długość 12. Oblicz pole pierścienia kołowego utworzonego przez te okręgi.

**Zad. 17**

- a) Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 16, na którym oparty jest kąt środkowy o mierze 72° .
- b) Oblicz miarę kąta środkowego okręgu o promieniu 10, opartego na łuku długości 5π .
- c) Łuk okręgu oparty na kącie środkowym 60° ma długość π . Wyznacz promień tego okręgu.

Zad. 18

- a) Wyznacz pole i obwód wycinka koła o promieniu 8 i kącie środkowym 90° .
- b) Wyznacz pole i obwód wycinka koła o promieniu 6 i kącie środkowym 150° .
- c) Wycinek koła o promieniu 10 ma pole równe 20π . Wyznacz miarę kąta środkowego tego wycinka koła.
- d) Wycinek koła o kącie środkowym 120° ma pole równe 12π . Wyznacz promień tego koła.

Zad. 19

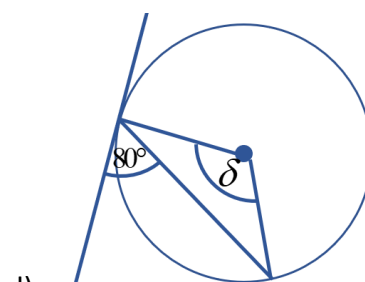
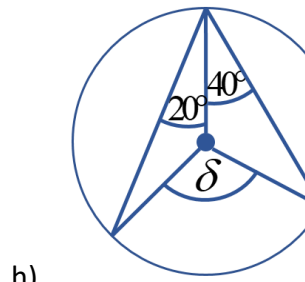
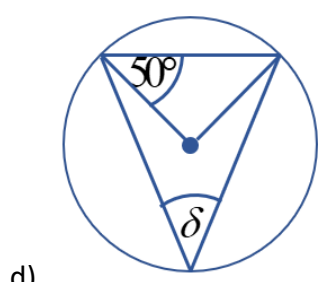
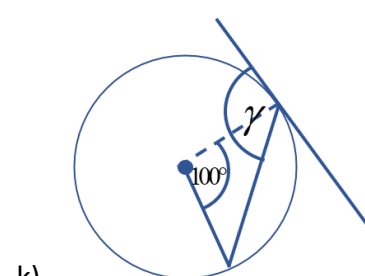
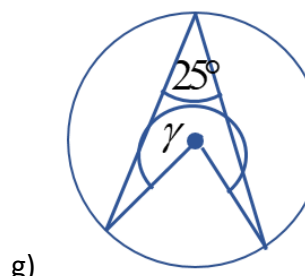
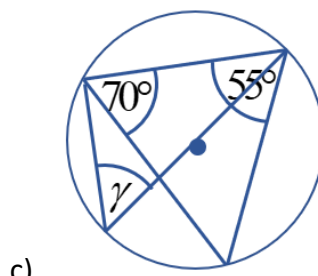
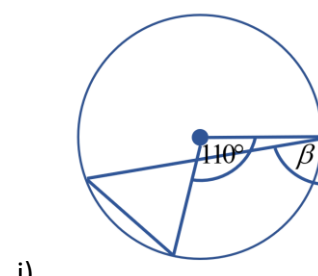
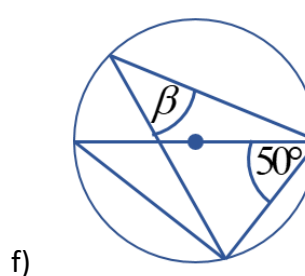
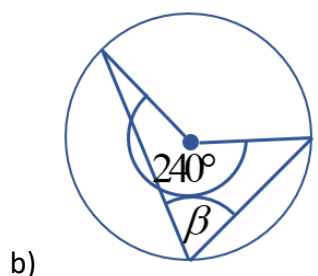
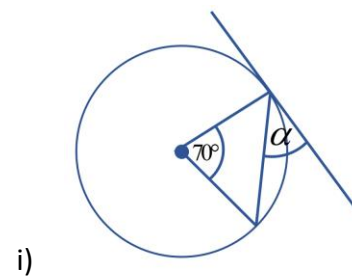
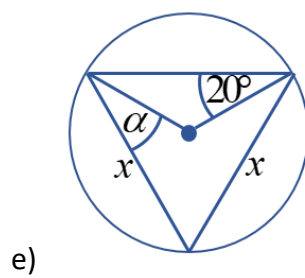
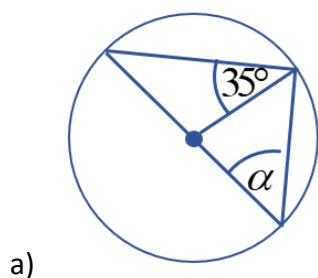
- a) W wycinek koła o promieniu 18 wpisano okrąg o promieniu 6. Wyznacz miarę kąta środkowego tego wycinka.
- b) W wycinek koła o promieniu $2 + \sqrt{3}$ wpisano okrąg o promieniu $\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta środkowego tego wycinka.
- c) W wycinek koła o promieniu 10 i kącie środkowym 90° wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.
- d) W wycinek koła o promieniu 12 i kącie środkowym 60° wpisano okrąg. Wyznacz promień tego okręgu.

Zad. 20

W kole o promieniu 12 zaznaczono kąt środkowy o mierze 60° . Ramiona tego kąta wyznaczają na brzegu koła punkty A i B . Oblicz pola odcinków koła, na które cięciwa AB podzieliła to koło.

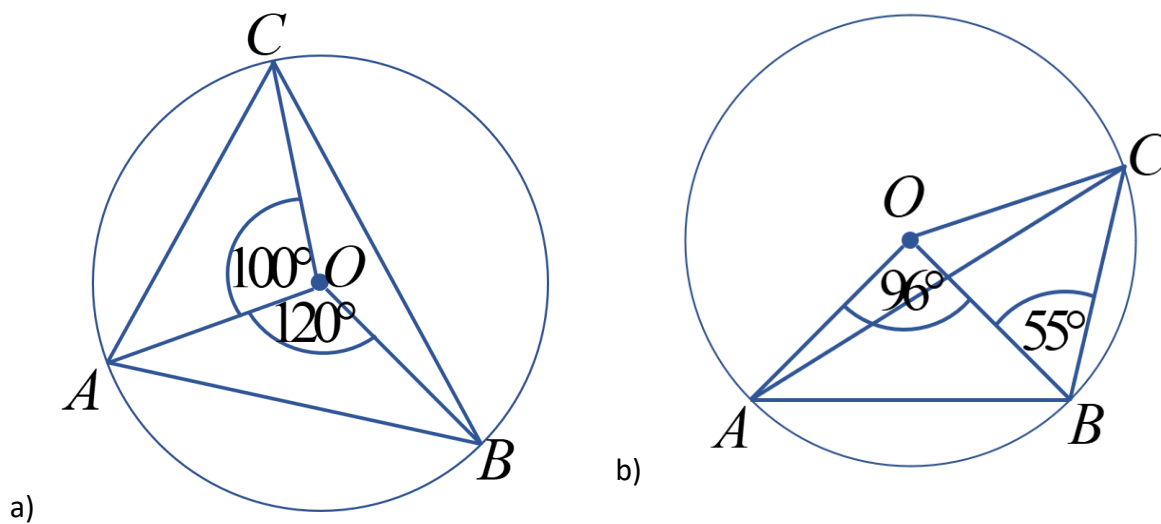
Zad. 21

Korzystając z danych na rysunkach, wyznacz miary kątów oznaczonych literami:

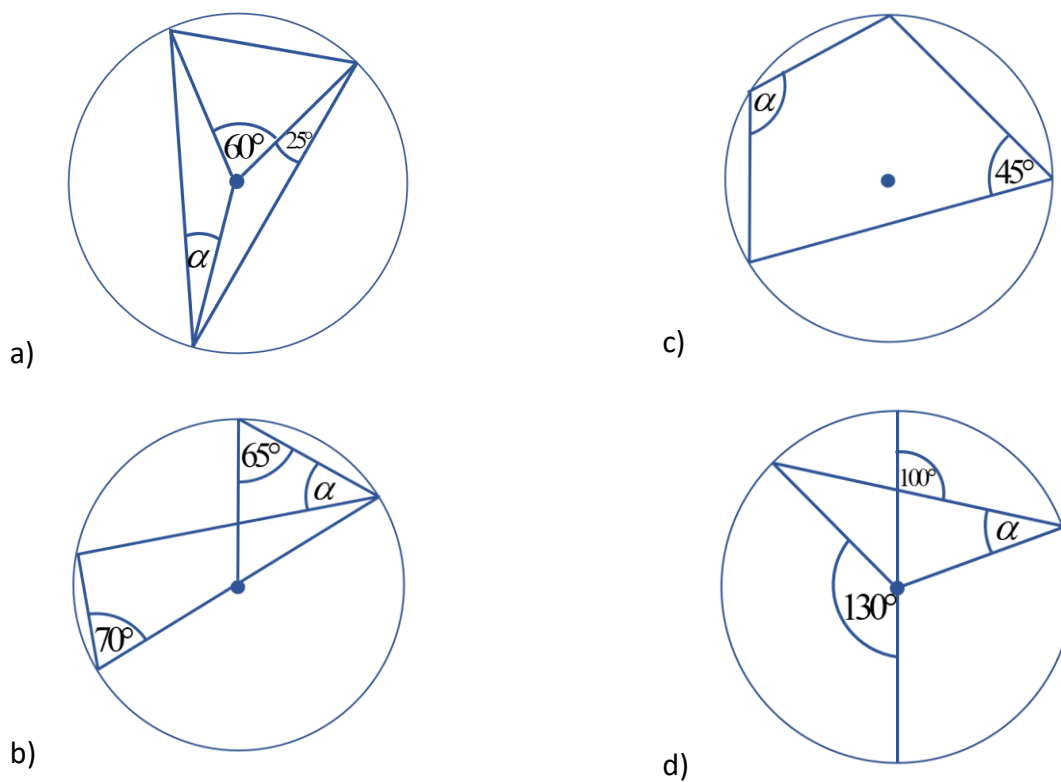


Zad. 22

Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC :


Zad. 23

Korzystając z danych na rysunku wyznacz miarę kąta α :



Zad. 24

Na okręgu zaznaczono punkty $A_1, A_2, \dots, A_9$, które podzieliły ten okrąg na 9 równych łuków. Wyznacz miary kątów:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ \sphericalangle A_1 A_3, A_2 $ | c) $ \sphericalangle A_4 A_3, A_8 $ |
| b) $ \sphericalangle A_2 A_5, A_7 $ | d) $ \sphericalangle A_1 A_5, A_8 $ |

Zad. 25

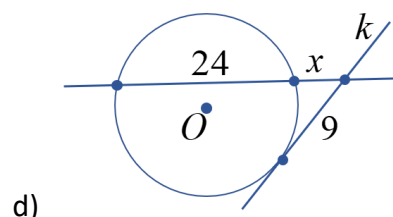
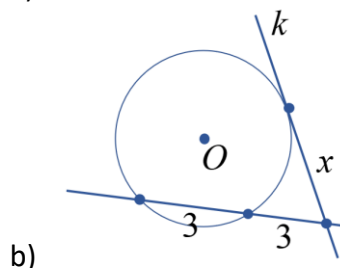
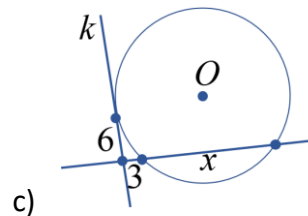
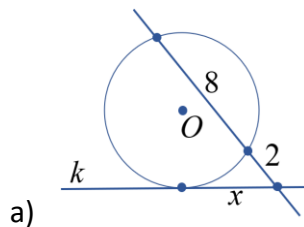
- Dany jest okrąg o promieniu 12 opisany na trójkącie, którego kąty mają miary $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$. Wyznacz długości łuków, na które punkty wspólne trójkąta i okręgu dzielą ten okrąg.
- Dany jest okrąg opisany na trójkącie. Wierzchołki tego trójkąta dzielą okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 2:3:5. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

Zad. 26

W okręgu poprowadzono cięciwy $|AB| = 21$ i $|CD| = 15$, które przecięły się w punkcie E . Wyznacz długości odcinków, na które punkt E dzieli cięciwy AB i CD , jeśli wiadomo, że $|AC| = 4$ oraz $|BD| = 12$.

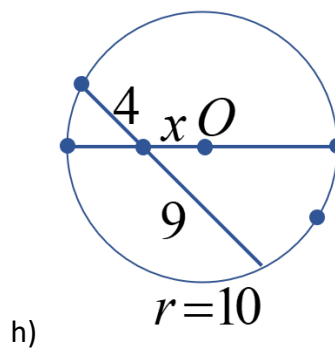
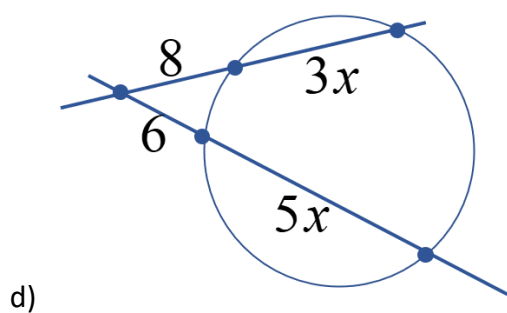
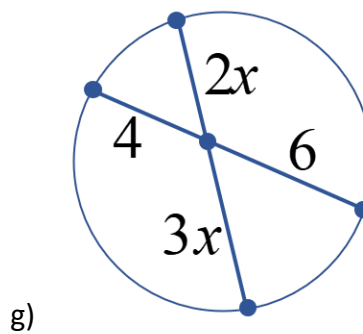
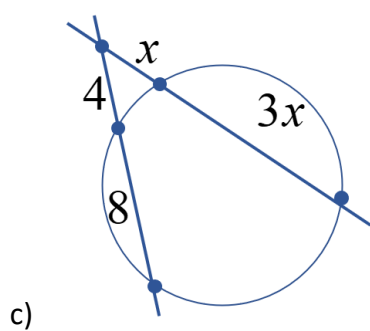
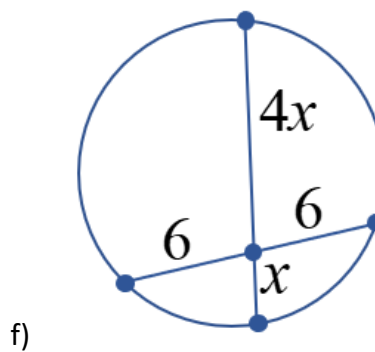
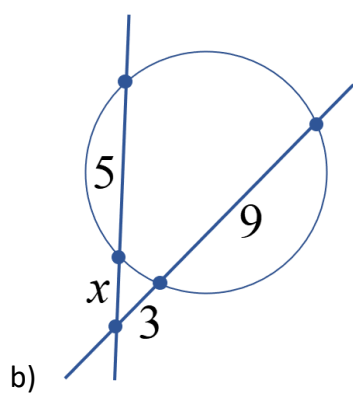
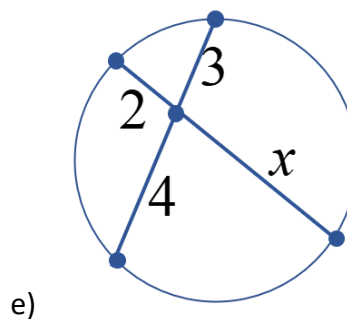
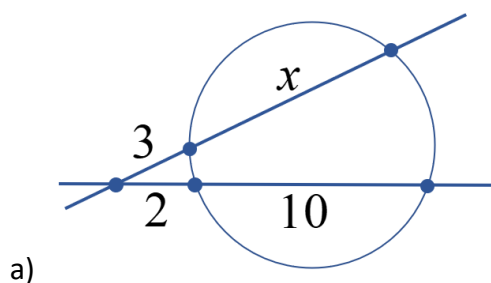
Zad. 27

Prosta k jest styczna do okręgu o środku O . Korzystając z danych na rysunku, wyznacz długości odcinków oznaczonych literami:



Zad. 28

Korzystając z danych na rysunku, wyznacz długości odcinków oznaczonych literami:



Zad. 29

- a) Przez punkt K oddalony o 18 od środka O okręgu poprowadzono prostą, która przecięła ten krąg w punktach M i N . Wyznacz promień tego okręgu, jeśli $|KM| = 4$ oraz $|MN| = 13$.
- b) Dany jest okrąg o środku O . Średnica AB tego okręgu ma długość 24. Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie B . Przez punkt A poprowadzono sieczną, która przecięła okrąg w punkcie C oraz prostą k w punkcie D tak, że $|AC| < |AD|$. Oblicz długość cięciwy AC , jeśli $|DB| = 7$.
- c) W okręgu poprowadzono cięciwy $|KL| = 14$ oraz $|MN| = 11$, które przecięły się w punkcie S . Odcinek MS jest o 5 dłuższy od odcinka NS . Oblicz długości odcinków KS, LS, MS, NS .

Zad. 30

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie:

- a) równobocznym o boku 4
- b) równobocznym o boku $6\sqrt{3}$
- c) prostokątnym o przyprostokątnych 8 i 15
- d) prostokątnym o przyprostokątnych 6 i 6
- e) równoramiennym o ramionach 20 i podstawie 24
- f) równoramiennym o ramionach 25 i podstawie 48
- g) równoramiennym o ramionach 8 i podstawie $8\sqrt{2}$
- h) o bokach 13, 14, 15 i polu 84

Zad. 31

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, jeśli:

- a) długość okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 16π
- b) wysokość tego trójkąta jest o 3 dłuższa od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie
- c) pole okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 12π
- d) średnica okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość $12\sqrt{3}$



Zad. 32

- a) Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach 13 i podstawie 10. Oblicz odległości środka okręgu opisanego na tym trójkącie od ramion oraz podstawy tego trójkąta.
- b) Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o obwodzie $12 + 6\sqrt{2}$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.
- c) Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o polu 8. Oblicz długość średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.
- d) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, jeśli długość okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 12π .
- e) Średnica okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość 18. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
- f) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 18 i 24. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.
- g) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 20, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest o 8 krótsza od niej. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.
- h) W okrąg o promieniu $9\frac{3}{8}$ wpisano trójkąt prostokątny. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 9. Oblicz pole tego trójkąta.

Zad. 33

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt:

- a) równoboczny o boku 6
- b) równoboczny o boku $8\sqrt{3}$
- c) prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4
- d) prostokątny równoramienny o przyprostokątnej długości 12
- e) prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 6
- f) równoramienny o ramionach 17 i podstawie 16
- g) równoramienny o ramionach 25 i podstawie 14
- h) prostokątny równoramienny, jeśli promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 10
- i) prostokątny o obwodzie 40 i przeciwprostokątnej 17
- j) prostokątny o obwodzie 72, jeśli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest o 9 krótszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

**Zad. 34**

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, jeśli:

- a) długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 8π
- b) wysokość tego trójkąta jest o 12 dłuższa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt
- c) pole okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 12π
- d) średnica okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość $2\sqrt{3}$

Zad. 35

Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, jeśli:

- a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest o 4 dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt
- b) średnica okręgu wpisanego w ten trójkąt jest o 6 krótsza od średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie
- c) długość okręgu wpisanego w ten trójkąt jest o 8π mniejsza od długości okręgu opisanego na tym trójkącie
- d) pole koła opisanego na tym trójkącie jest o 36π większe od pola koła wpisanego w ten trójkąt

Zad. 36

- a) W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona na podstawę ma długość 12, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 4,5. Oblicz obwód tego trójkąta.
- b) W trójkąt równoramienny o podstawie 20 wpisano okrąg o promieniu $r = 6\frac{2}{3}$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zad. 37

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 7 i 24 wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które punkty styczności okręgu z bokami trójkąta podzieliły boki tego trójkąta.



Zad. 38

- a) W trójkąt ABC o kątach $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ wpisano okrąg styczny do boków trójkąta ABC w punktach K, L, M . Wyznacz miary kątów trójkąta KLM .
- b) Na trójkącie ABC o kątach $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ opisano okrąg. Przez wierzchołki tego trójkąta poprowadzono styczne do danego okręgu, które przecięły się w punktach K, L, M . Wyznacz miary kątów trójkąta KLM .

KONIEC