



KURS

RELACJE i FUNKCJE

LEKCJA 5

Relacje częściowego porządku. Diagramy
Hassego.

ZADANIE DOMOWE



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Jakie własności muszą posiadać relacje częściowego porządku ?

- a) Muszą być zwrotne, lub antysymetryczne, lub przechodnie.
- b) Muszą być zwrotne, nie-symetryczne i przechodnie.
- c) Muszą być zwrotne, antysymetryczne i przechodnie.
- d) Muszą być zwrotne, przeciwsymetryczne i przechodnie.

Pytanie 2

Co to jest „zbiór częściowo uporządkowany”?

- a) Para złożona ze zbioru i określonej w nim relacji częściowego porządku.
- b) Zbiór, w którym można uporządkować wszystkie elementy od najmniejszego do największego.
- c) Zbiór, w którym część elementów jest liczbami, które można porównać do siebie.
- d) Zbiór, w którym wszystkie elementy można ponumerować numerami 1, 2, 3, ...

Pytanie 3

Weźmy zbiór wszystkich możliwych zwierząt mieszkających razem z ludźmi (pieski, kotki, muchy, szczury itd.), z relacją „ x jest w relacji y , kiedy y jest bardziej, lub tak samo słodkie, od x ”. Zauważmy, że niektóre elementy są nieporównywalne, bo nie da się jednoznacznie powiedzieć, czy pieski są bardziej słodkie od kotków, chociaż na pewno są bardziej słodkie od much. Czy ten zbiór jest częściowo uporządkowany tą relacją?

- a) Nie, bo nie jest to zbiór skończony.
- b) Nie cały zbiór, tylko jego podzbiór.
- c) Tak.
- d) Nie, bo ta relacja nie jest antysymetryczna.

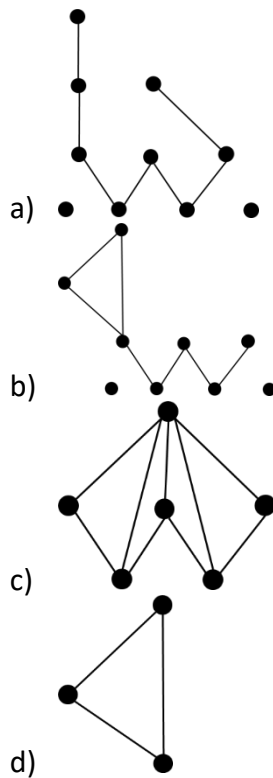
Pytanie 4

Wiemy, że $\leq$ jest relacją częściowego porządku, a x i y różnymi elementami ze zbioru częściowo uporządkowanego tą relacją. Wiemy też, że $x \leq y$. Co możemy powiedzieć na podstawie powyższych?

- a) Że zachodzi również $y \leq x$.
- b) Że element y jest na prawo od elementu x na osi liczbowej.
- c) Że elementy x i y są nieporównywalne.
- d) Że na pewno nie zachodzi $y \leq x$.

Pytanie 5

Który z poniższych diagramów jest diagramem Hassego?

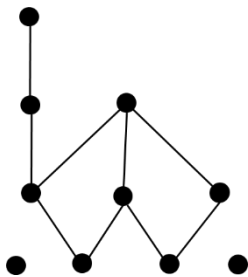


Pytanie 6

Które zdanie jest prawdziwe?

- a) Zbiór częściowo uporządkowany ma element maksymalny i minimalny.
- b) Zbiór częściowo uporządkowany ma co najwyżej jeden element maksymalny i odpowiednio co najwyżej jeden element minimalny.
- c) Zbiór częściowo uporządkowany może mieć wiele elementów maksymalnych.
- d) Jeśli zbiór częściowo uporządkowany ma element minimalny, ma także element maksymalny.

Pytanie 7



Ile elementów maksymalnych ma zbiór przedstawiony na diagramie Hassego powyżej?

- a) 3
- b) 4
- c) 1
- d) 0

Pytanie 8

Czym różni się element minimalny od elementu najmniejszego?

- a) Niczym.
- b) Element minimalny może być nieporównywalny do jakiś innych elementów.
- c) Element minimalny może być większy od najmniejszego.
- d) Element minimalny może być mniejszy od najmniejszego.



Pytanie 9

Które zdanie jest prawdziwe?

- a) Zbiór może być kresem elementu.
- b) Zbiór może być kresem zbioru.
- c) Element może być kresem zbioru.
- d) Element może być kresem elementu.

Pytanie 10

Co to jest krata?

- a) Zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy podzbiór posiada supremum i infimum.
- b) Zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy podzbiór dwuelementowy posiada supremum i infimum.
- c) Zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy podzbiór dwuelementowy posiada supremum lub infimum.
- d) Zbiór częściowo uporządkowany, który posiada supremum i infimum.

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Weźmy zbiór $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wraz z relacją podzielności $|$, tzn. $x|y \Leftrightarrow x$ jest dzielnikiem y .

- a) Pokaż, że relacja ta jest relacją częściowego porządku.
- b) Znajdź elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe.

Zad. 2

Weźmy zbiór X , który ma co najmniej dwa elementy. Niech $U = P(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów X , z wyjątkiem zbioru pustego i całego zbioru X . Weźmy relację zawierania $\subseteq$, określoną w zbiorze U .

- a) Pokaż, że relacja ta jest relacją częściowego porządku.
- b) Znajdź elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe.

Zad. 3

Niech Σ będzie pewnym alfabetem, składającym się z co najmniej dwóch liter. Dwa słowa w_1, w_2 , należące do zbioru słów nad tym alfabetem Σ^* , należą do relacji ρ , jeżeli do początku pierwszego można „dopisać” jakieś litery i uzyskać słowo w_2 .

$$w_1, w_2 \in \Sigma^*, w_1 \rho w_2 \Leftrightarrow \exists_{w_3 \in \Sigma^*} w_2 = w_3 w_1$$

- a) Pokaż, że relacja ta jest relacją częściowego porządku.
- b) Znajdź elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe.

Zad. 4

Weźmy zbiór $X = \{2, 3, \dots, 15\}$ wraz z relacją podzielności $|$ określoną w tym zbiorze.

- a) Narysuj diagram Hassego tej relacji.
- b) Wskaż elementy minimalne, maksymalne, największe, najmniejsze.

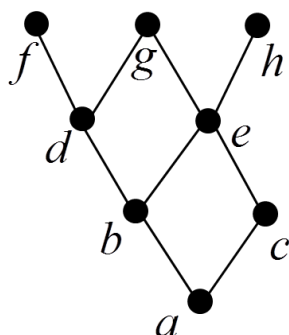
Zad. 5

Weźmy zbiór $X = \{\{1, 4\}, \{0, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$, wraz z relacją zawierania $\subseteq$.

- a) Narysuj diagram Hassego tej relacji.
- b) Wskaż elementy minimalne, maksymalne, największe, najmniejsze.

Zad. 6

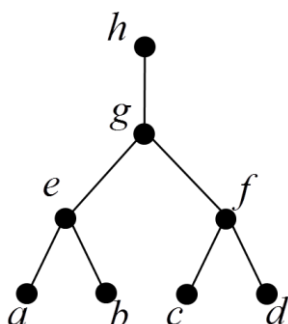
Weźmy diagram Hassego pewnego zbioru częściowo uporządkowanego:



- Jakie elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe ma ten zbiór?
- Które elementy nakrywają element a?
- Wyznacz: $\inf\{c,d\}$, $\sup\{b,c\}$, $\sup\{a,b\}$, $\sup\{b,c,d\}$, $\inf\{a,b,e,g\}$.
- Czy ten zbiór jest kratą?

Zad. 7

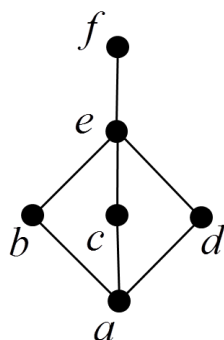
Weźmy diagram Hassego pewnego zbioru częściowo uporządkowanego:



- Jakie elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe ma ten zbiór?
- Które elementy nakrywają element e?
- Wyznacz: $\sup\{a,g\}$, $\inf\{c,d,f\}$, $\sup\{a,d\}$, $\inf\{c,d,e\}$, $\sup\{a,b,f,h\}$.
- Czy ten zbiór jest kratą?

Zad. 8

Weźmy diagram Hassego pewnego zbioru częściowo uporządkowanego:



- a) Jakie elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe ma ten zbiór?
- b) Które elementy nakrywają element a ?
- c) Wyznacz: $\sup\{a,e,d\}$, $\inf\{b,c,e\}$, $\sup\{b,c,d,e\}$, $\inf\{a,b,c,d,e,f\}$, $\sup\{a,b\}$.
- d) Czy ten zbiór jest kratą?

Zad. 9

Bierzemy zbiór liczb rzeczywistych R wraz z relacją częściowego porządku $\leq$. Wyznacz:

- a) $\inf \{x \in R : x > 1\}$
- b) $\sup \{x \in R : x^2 \leq 3\}$
- c) $\sup \{x \in R : x \geq \pi\}$
- d) $\sup \{x \in R : x + 1 < -7\}$

Zad. 10

Udowodnij, że jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym znajduje się element najmniejszy, to jest on elementem minimalnym i nie ma poza nim innych elementów minimalnych.

KONIEC