

Kurs Szeregi

Wzory

Zbieżność szeregu z definicji (suma szeregu)

Aby zbadać zbieżność szeregu $\sum a_n$ z definicji, lub sumę tego szeregu, należy:

1. Rozpisać ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots = \dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

2. Obliczyć sumę tego ciągu, to znaczy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

Granica tego ciągu jest sumą szeregu $\sum a_n$

Kryteria zbieżności szeregów

- Kryterium D'Alemberta
 - Kryterium Cauchy'ego
 - Kryterium porównawcze
 - Kryterium całkowite
- } Dla szeregów o wyrazach nieujemnych
- Zbieżność bezwzględna szeregu
 - Kryterium Leibnitz'a

Kryterium d'Alamberta i Cauchy'ego

Kryterium D'Alamberta

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, wtedy:

- Szereg jest zbieżny, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- Szereg jest rozbieżny, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Kryterium Cauchy'ego

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, wtedy:

- Szereg jest zbieżny, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
- Szereg jest rozbieżny, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Kryterium porównawcze

Szereg Dirichleta

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{zbieżny} & \text{dla } \alpha > 1 \\ \text{rozbieżny} & \text{dla } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Nierówności

$$\sin x < x \quad (\text{dla } x > 0) \qquad \sin x > \frac{2}{\pi} x \quad (\text{dla } x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle)$$

$$\ln x \leq x - 1 \qquad \operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi} x \quad (\text{dla } x \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle)$$

Kryterium porównawcze

Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i inny szereg $\sum b_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, wtedy:

Zbieżność

Jeżeli $a_n \leq b_n$ od pewnego n (dla $n > n_0, n_0 \in \mathbb{N}$) i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, wtedy szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Rozbieżność

Jeżeli $a_n \geq b_n$ od pewnego n (dla $n > n_0, n_0 \in \mathbb{N}$) i szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny, wtedy szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Mamy szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Tworzymy do niego funkcję $f(x)$, taką, że $f(n) = a_n$ (zastępujemy „n” w ciągu „x”-sem).

Jeśli funkcja ta jest malejąca i dodatnia dla $x \geq n_0$, liczymy całkę $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$.

Jeżeli całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Jeżeli całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna, szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ też jest rozbieżny.

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Aby szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ był zbieżny, musi zachodzić: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Zbieżność bezwzględna szeregu

Mamy szereg: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (może mieć wyrazy ujemne).

Jeżeli szereg: $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest również zbieżny.

O takiej zbieżności mówimy, że jest to „zbieżność bezwzględna”, a szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nazywamy „zbieżnym bezwzględnie”.

Zbieżność warunkowa szeregu

Szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, ale w ogóle jest zbieżny, nazywamy szeregiem „warunkowo zbieżnym”.

Kryterium Leibnitz’a

Szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nazywamy „naprzemiennym”, gdy jego wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne.

Jego ogólna postać to: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Szereg naprzemienny jest zbieżny, gdy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$