

Estymacja Przedziałowa

Wzory

Szacujemy parametry w populacji generalnej na podstawie parametrów próbki

I. Szacowanie średniej m w populacji generalnej

I.1. Populacja generalna ma rozkład normalny i znamy jej odchylenie standardowe σ .

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że $P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$ ($1 - \alpha$ to poziom ufności) – rysując przybliżony wykres
- Stosujemy statystykę $Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ i mamy przedział ufności:
$$P\left(-z_\alpha < \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sqrt{n} < z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$
, z której wyznaczamy m
- Mamy przedział ufności: $P(\dots < m < \dots) = 1 - \alpha$
- Interpretujemy wynik

I.2.a Populacja generalna ma rozkład normalny, nie znamy jej odchylenia standardowego σ , liczebność próbki n jest mała.

- Z tablic **rozkładu t-Studenta** odczytujemy kwantyl $t_{\alpha;n-1}$ – nie rysując wykresu, tylko wprost z tablic ($1 - \alpha$ to poziom ufności)
- Stosujemy statystykę $t = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n-1}$ i mamy przedział ufności:
$$P\left(-t_{\alpha;n-1} < \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n-1} < t_{\alpha;n-1}\right) = 1 - \alpha$$
, z której wyznaczamy m
- Mamy przedział ufności: $P(\dots < m < \dots) = 1 - \alpha$
- Interpretujemy wynik

I.2.b Populacja generalna ma rozkład normalny, nie znamy jej odchylenia standardowego σ , liczebność próbki n jest duża.

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że
$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$$
 ($1 - \alpha$ to poziom ufności) – rysując przybliżony wykres
- Stosujemy statystykę $Z = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n}$ i mamy przedział ufności:
$$P\left(-z_\alpha < \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n} < z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$
, z której wyznaczamy m
- Mamy przedział ufności: $P(\dots < m < \dots) = 1 - \alpha$
- Interpretujemy wynik

I.3 Nie znamy rozkładu populacji generalnej, liczebność próbki n jest duża.

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że
$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$$
 ($1 - \alpha$ to poziom ufności) – rysując przybliżony wykres
- Stosujemy statystykę $Z = \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n}$ i mamy przedział ufności:
$$P\left(-z_\alpha < \frac{\bar{X} - m}{S} \sqrt{n} < z_\alpha\right) = 1 - \alpha$$
, z której wyznaczamy m
- Mamy przedział ufności: $P(\dots < m < \dots) = 1 - \alpha$
- Interpretujemy wynik

II. Szacowanie wariancji i odchylenia standardowego w populacji generalnej

II.a Populacja generalna ma rozkład normalny, nie znamy jej odchylenia standardowego σ , liczebność próbki n jest mała.

- Z tablic **chi-kwadrat** odczytujemy dwa kwantyle $\chi_{\frac{\alpha}{2};n-1}^2, \chi_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}^2$ – (możemy narysować wykres, $1-\alpha$ to poziom ufności)
- Stosujemy statystykę $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ i mamy przedział ufności:

$$P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}^2 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2};n-1}^2\right) = 1-\alpha, \text{ z której wyznaczamy } \sigma$$

- Mamy przedział ufności: $P(\dots < \sigma < \dots) = 1-\alpha$
- Interpretujemy wynik

II.b Populacja generalna ma rozkład normalny, nie znamy jej odchylenia standardowego σ , liczebność próbki n jest duża.

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że $P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1-\alpha$ ($1-\alpha$ to poziom ufności) – rysując przybliżony wykres
- Stosujemy statystykę $Z = \frac{S-\sigma}{\sigma}\sqrt{2n}$ i mamy przedział ufności:

$$P\left(\frac{S}{1+\frac{z_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{S}{1-\frac{z_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) \approx 1-\alpha$$

- Interpretujemy wynik

III. Szacowanie prawdopodobieństwa (odsetka, frakcji) w populacji generalnej

Liczebność próbki n jest duża.

p - prawdopodobieństwo (odsetek, frakcja) w populacji generalnej

m - liczba jednostek w próbie mających daną cechę

$\frac{m}{n}$ - odsetek jednostek w próbie mających daną cechę

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że $P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$ ($1 - \alpha$ to poziom ufności) – rysując przybliżony wykres

- Stosujemy statystykę $Z = \frac{\frac{m}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ i mamy przedział ufności:

$$P\left(\frac{m}{n} - z_\alpha \sqrt{\frac{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}} < p < \frac{m}{n} + z_\alpha \sqrt{\frac{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- Interpretujemy wynik

Minimalna liczebność próby

d - dopuszczalny poziom błędu

1. Szacujemy średnią m w rozkładzie normalnym przy znanym odchyleniu standardowym σ .

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że:

$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha \quad (1 - \alpha \text{ to poziom ufności}) - \text{rysując przybliżony wykres}$$

- $$n \geq \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{d^2}$$

2. Szacujemy średnią m w rozkładzie normalnym przy nieznanym odchyleniu standardowym σ .

- Wyznaczamy $\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ z wstępnej próbki
- Z tablic **rozkładu t-Studenta** odczytujemy kwantyl $t_{\alpha;n-1}$ – nie rysując wykresu, tylko wprost z tablic ($1 - \alpha$ to poziom ufności)
- $$n \geq \frac{t_{\alpha;n-1}^2 \cdot \hat{S}^2}{d^2}$$

3. Szacujemy prawdopodobieństwo p .

- Z tablic **rozkładu normalnego** odczytujemy kwantyl z_α taki, że:

$$P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha \quad (1 - \alpha \text{ to poziom ufności}) - \text{rysując przybliżony wykres}$$

- $$n \geq \frac{z_\alpha^2 \cdot \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)}{d^2}$$