



KURS ZBIORY

LEKCJA 4

Działania nieskończone na zbiorach

Zadanie Domowe



Część 1: TEST

Zaznacz poprawną odpowiedź (tylko jedna jest prawdziwa).

Pytanie 1

Czym mogą być indeksy t ze zbioru indeksów T ?

- a) Muszą być liczbami naturalnymi bez zera.
- b) Muszą być liczbami naturalnymi łącznie z zerem.
- c) Liczbami.
- d) Mogą być dowolnymi elementami jakiegoś dowolnego zbioru.

Pytanie 2

Jakimi zbiorami mogą być zbiory z indeksowanej rodziny zbiorów A_t ?

- a) Wyłącznie liczbowymi.
- b) Wyłącznie przeliczalnymi.
- c) Dowolnymi.
- d) Wyłącznie niepustymi.

Pytanie 3

Czym jest uogólniona suma zbiorów $\bigcup_t A_t$?

- a) Zbiorem elementów, które należą do byle jakiego zbioru A_t .
- b) Elementem, który należy do dowolnego zbioru A_t .
- c) Sumą przedziałów liczbowych A_t .
- d) Zbiorem elementów, należących do wszystkich przedziałów A_t .

Pytanie 4

Czym jest uogólniony iloczyn zbiorów $\bigcap_t A_t$?

- a) Elementem, który należy do każdego zbioru A_t .
- b) Zbiorem elementów, które należą wszystkich zbiorów A_t .
- c) Iloczynem przedziałów liczbowych A_t .
- d) Zbiorem elementów, które należą do któregoś ze zbiorów A_t .

Pytanie 5

Jak wyglądać będzie A_5 w rodzinie indeksowanej zbiorów $A_t = \{x : t \leq x - 5\}$ ($t \in \mathbb{N}, A_t \subset \mathbb{R}$)?

- a) $\langle 10, +\infty \rangle$
- b) $\langle 0, +\infty \rangle$
- c) $\langle -\infty, 0 \rangle$
- d) $\langle -\infty, 5 \rangle$

Pytanie 6

Wiedząc, że: $A_2 = (1, 5), A_3 = (4, 10), t \in \mathbb{N}_+, A_t \subset \mathbb{R}$, jak wyglądać może rodzina A_t ?

- a) $A_t = \{x : (t-1)^2 < x < t^2 + 1\}$
- b) $A_t = \{x : t^2 < x < t^2 + 1\}$
- c) $A_t = \{x : (t-1)^2 < x < (t+1)^2\}$
- d) $A_t = \{x : t^2 < x < (t+1)^2\}$



Pytanie 7

Mamy daną nieskończoną rodzinę przedziałów liczbowych: $\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \dots$

Które zdanie jest prawdziwe.

- a) Sumą tej rodziny jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, z wyjątkiem liczb całkowitych. Iloczynem tej rodziny są całkowite liczby nieujemne.
- b) Sumą tej rodziny jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Iloczynem tej rodziny są całkowite liczby nieujemne.
- c) Sumą tej rodziny jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Iloczynem tej rodziny jest zbiór pusty.
- d) Sumą tej rodziny jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Iloczynem tej rodziny jest zbiór pusty.

Pytanie 8

Mamy daną rodzinę zbiorów, w której indeksami są studenci w Polsce, a zbiorami indeksowanymi ich oceny z poszczególnych przedmiotów z zeszłego semestru. Które zdanie jest prawdziwe?

- a) Suma tej rodziny zbiorów to zbiór liczb naturalnych.
- b) 5 nie należy do sumy tej rodziny.
- c) 6 nie należy do sumy tej rodziny.
- d) W sumie tej rodziny znajduje się prawdopodobnie bardzo dużo „trójek”.

Pytanie 9

Które ze zdań jest prawdziwe?

- a) Niemożliwym jest, aby iloczyn rodziny zbiorów zawierała się w sumie, chyba, że zbiory te są takie same.
- b) Niemożliwym jest, aby iloczyn rodziny zbiorów zawierał się w którymś zbiorze z tej rodziny, chyba, że są takie same.
- c) Niemożliwym jest, aby suma rodziny zbiorów zawierała się w iloczynie, chyba, że zbiory te są takie same.
- d) Iloczyn rodziny zbiorów zawiera co najmniej jeden element.



Pytanie 10

Mamy daną rodzinę zbiorów: $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n^2 \leq x \leq (m+1)^2\}$. Które zdanie jest prawdziwe?

- a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \bigcap_{m \in \mathbb{N}_+} A_{n,m} = \langle 1, +\infty \rangle$
- b) $A_{1,2} = \langle 1, 2 \rangle$
- c) $A_{1,2} = \langle 1, 4 \rangle$
- d) $A_{3,1} = \emptyset$

Część 2: ZADANIA

Zad. 1

Znaleźć sumę i iloczyn zbiorów dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_n \subset \mathbb{R}$.

- a) $A_n = \{x : 0 \leq x \leq n\}$
- b) $A_n = \left\{x : -\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n+1}\right\}$
- c) $A_n = \{x : (-1)^n < x < 7\}$
- d) $A_n = \left\{x : -9 - \frac{1}{n+2} \leq x < 2n^2 - 6n + 1\right\}$

Zad. 2

Znaleźć sumę i iloczyn zbiorów dla $t \in \mathbb{R}$, $A_t \subset \mathbb{R}$.

- a) $A_t = \{x : t < x < t+11\}$
- b) $A_t = \{x : |x| \leq |t|\}$
- c) $A_t = \left\{x : 3 - \frac{1}{t^2+1} < x < 4 + \frac{1}{t^2}\right\}, \quad t \neq 0$
- d) $A_t = \{x : 0 < x \leq 2 + \sin t\}$

Zad. 3

Wyznacz:

- $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$, oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t$, dla $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq t^2\}$
- $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$, oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t$, dla $A_t = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 5 + \sin t\}$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$, oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$, dla $A_n = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$
- $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$, oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t$, dla $A_t = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + (1-t^2)x - t^2 = 0\}$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$, oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n$, dla $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n^2 < x < n + 15000\}$

Zad. 4

Niech $A_{n,m} \subset \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N}_+$. Wyznacz:

- $\bigcup_n \bigcup_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$ dla $A_{n,m} = \{x : n-m < x < n+m\}$
- $\bigcup_n \bigcup_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$ dla $A_{n,m} = \{x : m^2 \leq x \leq n^2 + (m+1)^2\}$
- $\bigcup_n \bigcup_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$ dla $A_{n,m} = \left\{x : n - \frac{1}{m+1} < x \leq n + \frac{1}{m+1}\right\}$

Zad. 5

Udowodnij, że:

- $\bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$
- $\bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} = \bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{t,s}$
- $\bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{s \in S} B_s = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} (A_t \cap B_s)$
- $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$

Zad. 6

Sprawdź, czy zachodzą poniższe równości. Jeśli nie, znajdź kontrprzykład.

a) $\bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t$

b) $\bigcup_{t \in T} (A_t \setminus B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \setminus \bigcap_{t \in T} B_t$

KONIEC